NGUYỄN THỊ HƯỜNG

CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH
HÌNH HỌC 11

(CHƯƠNG TRÌNH NÂNG CAO VÀ CƠ BẢN)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN THỊ HƯỜNG

CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

HÌNH HỌC 11

(CHƯƠNG TRÌNH NÂNG CAO VÀ CƠ BẢN)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Lời nói đầu

Các em học sinh thân mến !

Bước sang thế kỉ XXI, thế kỉ của sự "bùng nổ" thông tin, đã và đang mang lại cho chúng ta những kiến thức vô cùng phong phú trên tất cả các lĩnh vực khoa học tự nhiên cũng như xã hội. Cùng với sự đổi mới toàn diện của ngành giáo dục; nội dung chương trình đổi mới và cách kiểm tra đánh giá kết quả học tập của học sinh đã thay đổi. Cuốn sách: ***"Các bài toán điển hình Hình học 11"*** giúp các em có một vốn kiến thức cơ bản đồng thời bao quát toàn bộ chương trình; giải quyết một số khó khăn khi tiếp cận với nội dung đổi mới.

Cuốn sách chúng tôi biên soạn dưới dạng vừa cung cấp những kiến thức cơ bản, vừa cung cấp những kiến thức nâng cao.

Cuốn sách: "***Các bài toán điển hình Hình học 11***" gồm ba phần:

1. Phép biến hình trong mặt phẳng
2. Quan hệ song song
3. Quan hệ vuông góc

Trong quá trình biên soạn, sẽ có những thiếu sót, chúng tôi mong nhận được sự góp ý chân thành từ các bạn đồng nghiệp và các em học sinh.

TÁC GIẢ

Vấn đề I

PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

A. CẦN NHỚ

1. Phép tịnh tiến

– Trong mặt phẳng cho vectơ $\vec{V}$. Phép tịnh tiến theo $\vec{V}$, kí hiệu: $T_{\vec{V}}$, là phép biến hình biến mỗi điểm M trong mặt phẳng thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{V}$. Vectơ $\vec{V}$ được gọi là vectơ tịnh tiến. Khi đó ta viết $T_{\vec{V}}(M) = M'$.

Vậy $T_{\vec{0}}(M) = M$.

– Ta có $T_{\vec{V}}(A) = A'$; $T_{\vec{V}}(B) = B' \Rightarrow A'B' = AB$

– Phép tịnh tiến biến ba điểm A; B; C thẳng hàng và điểm B ở giữa A; C lần lượt thành ba điểm A'; B'; C'thẳng hàng và điểm B'ở giữa A'; C'.

– Phép tịnh tiến biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho.

– Phép tịnh tiến biến một tam giác thành một tam giác bằng tam giác đã cho.

– Phép tịnh tiến $T_{\vec{V}}$ biến một đường tròn tâm I thành một đường tròn bằng đường tròn đã cho có tâm $I' = T_{\vec{V}}(I)$.

– *Chú ý*:

+ Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với một điểm M' xác định trong cùng một mặt phẳng được gọi là một phép biến hình trong mặt phẳng, thường kí hiệu là f. Điểm M' được gọi là ảnh của điểm M; điểm M được gọi là tạo ảnh của M' qua phép biến hình f, ta viết f(M) = M'.

+ Phép biến hình f thỏa mãn f(M) = M, $\forall$ M được gọi là phép đồng nhất.

– *Biểu thức toạ độ của phép tịnh tiến:*

Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho phép tịnh tiến theo $\vec{V}$. Biết $\vec{V} = (a; b)$. $\forall$ M(x; y), giả sử M'(x'; y') thoả mãn: $T_{\vec{V}}(M) = M'$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} x' = a + x \\ y' = b + y \end{cases}$$

2. Phép đối xứng trục

– Trong mặt phẳng cho trước một đường thẳng d. Phép đối xứng trục d, kí hiệu: $Đ_d$, là phép biến hình biến mỗi điểm M trong mặt phẳng thành điểm M' đối xứng với M qua d. Khi đó ta viết: $Đ_d(M) = M'$.

Đường thẳng d được gọi là trục của phép đối xứng trục $Đ_d$.

Lưu ý:

– Điểm M không thuộc đường thẳng d.

– Điểm M' được gọi là điểm đối xứng của điểm M qua đường thẳng d nếu d là đường trung trực đoạn thẳng MM'.

– Nếu điểm M thuộc đường thẳng d thì ta xem M đối xứng với chính nó qua d.

– $\forall M \in d$; $Đ_d(M) = M$.

$\forall M \notin d$; $Đ_d(M) = M'$ ta có d là đường trung trực đoạn thẳng MM'.

– Ta có $Đ_d(A) = A'$; $Đ_d(B) = B' \Rightarrow A'B' = AB$

– Phép đối xứng trục biến ba điểm A; B; C thẳng hàng và điểm B ở giữa A; C lần lượt thành ba điểm A'; B'; C'thẳng hàng và điểm B' ở giữa A'; C'.

– Phép đối xứng trục biến một đường thẳng thành một đường thẳng.

– Phép đối xứng trục biến tam giác thành một tam giác bằng tam giác đã cho.

– Phép đối xứng trục $Đ_d$ biến một đường tròn tâm I thành một đường tròn bằng đường tròn đã cho có tâm $I' = Đ_d(I)$.

– Chú ý:

Đường thẳng d được gọi là trục đối xứng của một hình $\mathcal{H}$ nếu phép đối xứng trục d biến hình $\mathcal{H}$ thành chính nó. Ta nói hình $\mathcal{H}$ là hình có trục đối xứng.

– Biểu thức toạ độ của phép đối xứng trục $Đ_{Ox}$; $Đ_{Oy}$

Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho điểm M(x; y), giả sử M'(x'; y') thoả mãn: $Đ_{Ox}(M) = M'$. Khi đó ta có: $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$

Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho điểm M(x; y), giả sử M'(x'; y') thoả mãn: $Đ_{Oy}(M) = M'$. Khi đó ta có: $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$

3. Phép đối xứng tâm

– Trong mặt phẳng cho trước một điểm I. Phép đối xứng tâm I, kí hiệu $Đ_I$, là phép biến hình biến mỗi điểm M trong mặt phẳng thành điểm M' đối xứng với M qua I. Khi đó ta viết: $Đ_I(M) = M'$

– Điểm I được gọi là tâm của phép đối xứng $Đ_I$.

– Ta có $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IM'} = \vec{0}$ hay $\overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$

– $Đ_I(I) = I$.

– $\forall M$; $Đ_I(M) = M' \Rightarrow Đ_I(M') = M$.

– Ta có $Đ_I(A) = A'$; $Đ_I(B) = B' \Rightarrow A'B' = AB$ và $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$.

– Phép đối xứng tâm biến ba điểm A;B;C thẳng hàng và điểm B ở giữa A; C lần lượt thành ba điểm A'; B'; C'thẳng hàng và điểm B' ở giữa A'; C'.

– Phép đối xứng tâm biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho.

– Phép đối xứng tâm biến một tam giác thành một tam giác bằng tam giác đã cho.

– Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến một đường tròn tâm J thành một đường tròn bằng đường tròn đã cho có tâm J' = $Đ_I$ (J).

– *Chú ý*: Điểm I được gọi là tâm của một hình $\mathcal{H}$ nếu phép đối xứng tâm I biến hình $\mathcal{H}$ thành chính nó. Ta nói hình $\mathcal{H}$ là có hình tâm đối xứng.

– *Biểu thức toạ độ của phép đối xứng trục* $Đ_I$

Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho điểm I(a; b). $\forall$ M(x; y), giả sử M'(x'; y') thoả mãn: $Đ_I$(M) = M'.

Khi đó ta có: $\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$

4. Phép quay

– Trong mặt phẳng cho trước một điểm I cố định và một góc lượng giác α. Phép quay tâm I góc α, kí hiệu $Q_{(I,\alpha)}$, là phép biến hình biến mỗi điểm M trong mặt phẳng thành điểm M'xác định sao cho IM' = IM và góc lượng giác (IM, IM') = α. Khi đó ta viết: $Q_{(I,\alpha)}$(M) = M'.

Điểm I được gọi là tâm quay; góc α được gọi là góc quay của $Q_{(I,\alpha)}$.

– *Chú ý*:

a. Chiều dương của phép quay trùng với chiều dương của đường tròn lượng giác.

b. Khi $\alpha = (2k+1)\pi$ (k là số nguyên) thì $Q_{(I,\alpha)}$ trùng $Đ_I$.

– $Q_{(I,\alpha)}$(A) = A'; $Q_{(I,\alpha)}$(B) = B' $\Rightarrow$ A'B' = AB

– Phép quay biến ba điểm A; B; C thẳng hàng và điểm B ở giữa A; C lần lượt thành ba điểm A'; B'; C' thẳng hàng và điểm B' ở giữa A'; C'.

– Phép quay biến một đường thẳng thành một đường thẳng.

– Phép quay biến một tam giác thành một tam giác bằng tam giác đã cho.

– Phép quay $Q_{(I,\alpha)}$ biến một đường tròn tâm J thành một đường tròn bằng đường tròn đã cho có tâm J' = $Q_{(I,\alpha)}$(J)

5. Phép dời hình

a. Định nghĩa: Phép dời hình là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

(Phép dời hình là phép biến hình sao cho nếu hai điểm M và N có ảnh tương ứng là M' và N' thì M'N' = MN).

Chú ý:

– Mỗi phép tịnh tiến; phép đối xứng trục; phép đối xứng tâm; phép quay là một phép dời hình.

– Nếu thực hiện liên tiếp hai phép dời hình thì cũng được một phép dời hình.

b. Tính chất chung của các phép dời hình

– Biến một đường thẳng thành một đường thẳng.

– Biến một tam giác thành một tam giác bằng tam giác đã cho.

– Biến một đường tròn tâm J thành một đường tròn bằng đường tròn đã cho có tâm J' (J' là ảnh của J qua phép dời hình).

c. Khái niệm về hai hình bằng nhau

Hai hình $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}'$ được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

Kí hiệu: $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$

6. Phép vị tự

– Trong mặt phẳng cho một điểm I cố định và một số thực k không đổi, $k \neq 0$. Phép vị tự tâm I tỉ số k, kí hiệu $V_{(I,k)}$, là phép biến hình biến mỗi điểm M trong mặt phẳng thành điểm M'sao cho $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$.

Khi đó ta viết: $V_{(I,k)}(M) = M'$.

– Điểm I được gọi là tâm vị tự, số k gọi là tỉ số vị tự.

– $V_{(I,k)}(I) = I$.

– $V_{(I,k)}(M) = M'$; $V_{(I,k)}(N) = N' \Rightarrow \overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ và $M'N' = |k|MN$.

– Phép vị tự biến ba điểm A; B; C thẳng hàng và điểm B ở giữa A;C lần lượt thành ba điểm A'; B'; C' thẳng hàng và điểm B' ở giữa A'; C'.

– Phép vị tự biến một đường thẳng d thành một đường thẳng d'

+ Đường thẳng d' trùng với đường thẳng d nếu d đi qua tâm vị tự.

+ Đường thẳng d' song song với đường thẳng d nếu d không đi qua tâm vị tự.

– Phép vị tự biến một góc thành một góc bằng nó.

– Phép vị tự tâm I tỉ số k biến một tam giác thành một tam giác đồng dạng với tam giác đã cho, có tỉ số đồng dạng là $|k|$.

– Phép vị tự tâm I tỉ số k biến đường tròn (O; R) thành đường tròn (O'; R') với $\overrightarrow{IO'} = k\overrightarrow{IO}$ và $R' = |k|R$.

**Tâm vị tự của hai đường tròn:* Cho hai đường tròn, luôn có phép vị tự $V_{(I,k)}$ biến đường tròn này thành đường tròn kia. Khi đó I được gọi là tâm vị tự của hai đường tròn trên.

+ Nếu $k > 0$ thì I gọi là tâm vị tự ngoài

+ Nếu $k < 0$ thì I gọi là tâm vị tự trong

– *Đặc biệt:* Cho hai đường tròn tiếp xúc nhau tại A. Khi đó A là một tâm vị tự của hai đường tròn trên.

7. Phép đồng dạng

a. Định nghĩa: Cho trước một số thực k dương. Phép đồng dạng theo tỉ số k là phép biến hình sao cho nếu hai điểm M và N có ảnh tương ứng là M' và N' thì M'N' = kMN.

Số k được gọi là tỉ số đồng dạng.

Chú ý:

– Phép dời hình là phép đồng dạng theo tỉ số $k = 1$.

– Thực hiện liên tiếp hai phép đồng dạng ta được một phép đồng dạng.

b. Tính chất

– Phép đồng dạng biến ba điểm A; B; C thẳng hàng và điểm B ở giữa A; C lần lượt thành ba điểm A'; B'; C' thẳng hàng và điểm B' ở giữa A'; C'.

– Phép đồng dạng biến một đường thẳng thành một đường thẳng.

– Phép đồng dạng theo tỉ số k biến một tam giác thành một tam giác đồng dạng với tam giác đã cho có tỉ số đồng dạng là k.

– Phép đồng dạng theo tỉ số k biến một đường tròn bán kính R thành một đường tròn có bán kính R' với R' = kR.

– Phép vị tự $V_{(I,|k|)}$ là một phép đồng dạng theo tỉ số $|k|$

– Mọi phép đồng dạng f tỉ số k đều là phép hợp thành của một phép vị tự tỉ số k và một phép dời hình.

Chú ý: Với mỗi điểm M bất kì, phép biến hình f biến điểm M thành điểm M_1, phép biến hình g biến điểm M_1 thành điểm M'. Phép biến hình h biến điểm M thành điểm M'; ta nói h có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép biến hình f; g. Khi đó người ta còn nói h là ***phép hợp thành*** của hai phép biến hình f; g (hay phép biến hình h được gọi là tích của hai phép biến hình f; g).

c. Khái niệm về hai hình đồng dạng

Hai hình $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}'$ được gọi là đồng dạng với nhau nếu có một phép đồng dạng biến hình $\mathcal{H}$ thành hình $\mathcal{H}'$ (hay ngược lại). Hình $\mathcal{H}$ đồng dạng với hình $\mathcal{H}'$ được kí hiệu là: $\mathcal{H} \sim \mathcal{H}'$

B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

Bài toán 1: Chứng minh các đẳng thức; chứng minh các bất đẳng thức; chứng minh hai hình bằng nhau; chứng minh các đường thẳng đồng quy; chứng minh nhiều điểm thẳng hàng...

Phương pháp: Dùng định nghĩa và các tính chất của phép biến hình đã học.

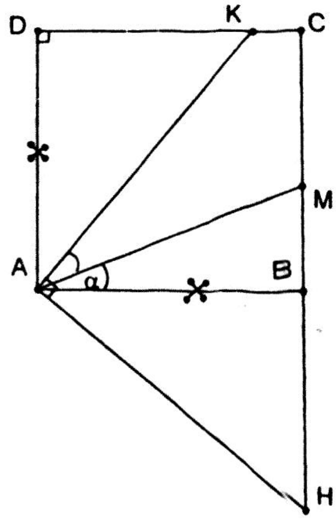
Ví dụ:

Bài 1: Trên cạnh BC; CD của hình vuông ABCD lần lượt lấy điểm M; K sao cho $\widehat{BAM} = \widehat{MAK}$.

Chứng minh rằng: BM + KD = AK.

Giải

Xét phép quay tâm A góc -90^0. Phép quay này biến D thành B; biến K thành H



$\Rightarrow \Delta ADK = \Delta ABH \Rightarrow \begin{cases} AK = AH \\ DK = BH \end{cases}$

Đặt $\alpha = \widehat{BAM} \Rightarrow \widehat{AMH} = 90^0 - \alpha$

Ta có góc $\widehat{HAM} + \widehat{MAK} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{HAM} + \alpha = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{HAM} = 90^0 - \alpha$

$\Rightarrow \widehat{HAM} = \widehat{AMH}$

$\Rightarrow \Delta AHM$ cân tại H $\Rightarrow$ AH = HM

Mà HM = HB + BM $\Rightarrow$ AH = DK + BM

$\Rightarrow$ AK = DK + BM (đpcm).

Chú ý: Với mỗi điểm M bất kì, phép biến hình f biến điểm M thành điểm M_1, phép biến hình g biến điểm M_1thành điểm M'. Phép biến hình h biến điểm M thành điểm M'; ta nói h có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép biến hình f; g. Khi đó người ta còn nói h là ***phép hợp thành*** của hai phép biến hình f; g (hay phép biến hình h được gọi là tích của hai phép biến hình f; g).

Bài 2: Cho ΔOAB vuông cân tại A. Chứng minh rằng: $Q_{(A,90^0)}$ là phép hợp thành của $Đ_{OA}$ và $Đ_{AB}$.

Giải

Xét điểm M bất kì và M_1; M' thoả mãn: $Đ_{OA}(M) = M_1$; $Đ_{AB}(M_1) = M'$.

Khi đó $Q_{(A,90^0)}(M) = M'$

Thật vậy:

Ta có $Đ_{OA}(M) = M_1 \Rightarrow AM = AM_1$

$Đ_{AB}(M_1) = M' \Rightarrow AM_1 = AM'$

Do đó AM = AM'

Đặt $\alpha = \widehat{OAM}$; $\beta = \widehat{MAB}$.

$\Rightarrow \alpha + \beta = 45^0$

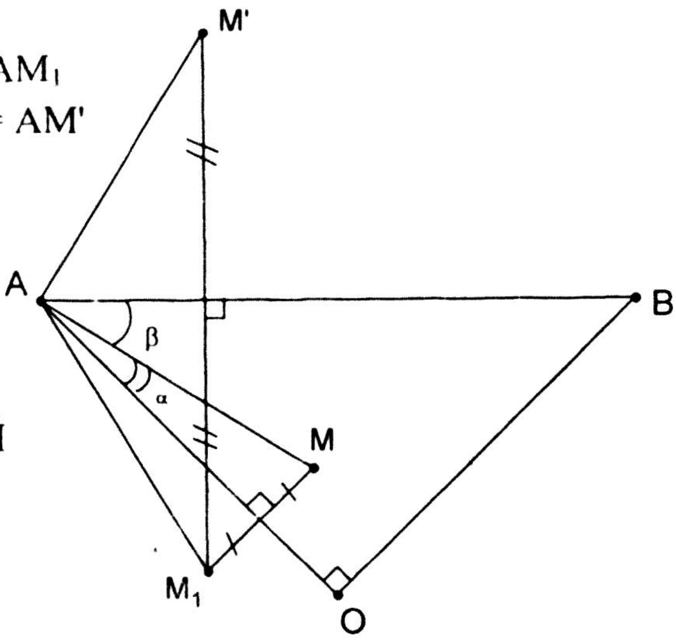
và $\widehat{M'AB} = \widehat{M_1AB} = 2\alpha + \beta$

Ta có $\widehat{MAM'} = \widehat{M'AB} + \widehat{BAM}$

$= (2\alpha + \beta) + \beta$

$= 2(\alpha + \beta)$

$= 90^0$



Vậy: $\begin{cases} \widehat{MAM'} = 90^0 \\ AM' = AM \end{cases} \Rightarrow Q_{(A,90^0)}(M) = M'$

Chú ý: Cho ΔOAB vuông cân tại A.

a. Thực hiện liên tiếp bốn phép đối xứng trục $Đ_{OA}$; $Đ_{AB}$; $Đ_{BA}$; $Đ_{BO}$ là phép hợp thành của $Đ_{OA}$ và $Đ_{OB}$.

b. Phép hợp thành của $Đ_{OA}$ và $Đ_{OB}$ là phép đối xứng tâm $Đ_O$.

c. Thực hiện liên tiếp hai phép quay $Q_{(A,90^0)}$; $Q_{(B,90^0)}$ ta được phép đối xứng tâm $Đ_O$.

Bài 3: Về phía ngoài của ΔABC dựng các hình vuông BCMN; ACPQ có tâm lần lượt là O; O'.

1. Chứng minh rằng khi A; B cố định và C thay đổi thi đường thẳng NQ luôn đi qua một điểm cố định.

2. Chứng minh rằng AM = PB và AM $\perp$ PB.

3. Gọi I là trung điểm cạnh AB. Chứng minh rằng: $\Delta IOO'$ là tam giác vuông cân.

Giải

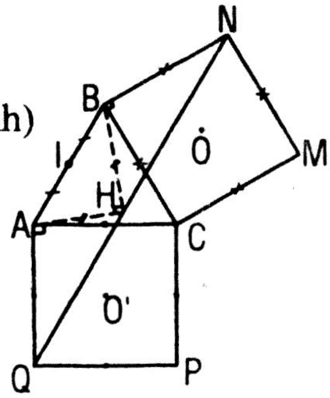
1. Xét $Q_{(A,90^0)}(Q) = C$ và $Q_{(B,90^0)}(C) = N$

Khi đó $Q_{(B,90^0)}(Q_{(A,90^0)}(Q)) = N = Đ_H(Q)$ (H: cố định)

(Thực hiện liên tiếp hai phép quay tâm A góc 90^0; phép quay tâm B góc 90^0 là một phép đối xứng tâm)

$\Rightarrow$ Điểm H là trung điểm đoạn thẳng QN

$\Rightarrow$ Đường thẳng QN qua điểm H cố định (đpcm)



2. $Q_{(C,90^0)}(A) = P$; $Q_{(C,90^0)}(M) = B \Rightarrow AM = PB$ và $AM \perp PB$ (đpcm)

3. Ta có IO là đường trung bình của ΔABM; IO' là đường trung bình của ΔABP

Suy ra $IO = \frac{1}{2}AM$ và $IO // AM$;

$IO' = \frac{1}{2}PB$ và $IO' // PB$.

Mặt khác ta có $AM = PB$ và $AM \perp PB$

$\Rightarrow IO = IO'$ và $IO \perp IO'$

Vậy $\Delta IOO'$ là tam giác vuông cân tại I (đpcm)

Bài 4: Về phía ngoài của một tứ giác lồi ABCD dựng các hình vuông có cạnh AB; BC; CD; DA. Chứng minh rằng:

1. Tâm của bốn hình vuông đó làm thành một tứ giác có hai đường chéo bằng nhau và vuông góc nhau.

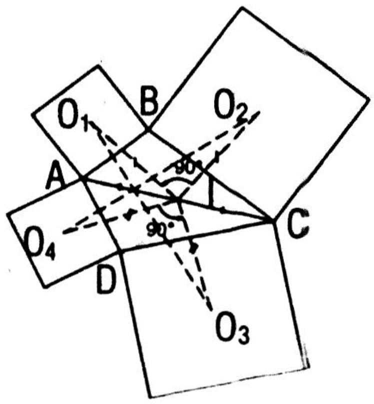
2. Trung điểm các đường chéo của các tứ giác ABCD, $O_1O_2O_3O_4$ là đỉnh của một hình vuông.

Giải

1. Gọi O_1; O_2; O_3; O_4 lần lượt là tâm các hình vuông có cạnh AB; BC; CD; DA.

Gọi I là trung điểm đoạn thẳng AC.

Xét ΔACD; ΔABC



Theo bài 3 ta có ΔIO_1O_2; ΔIO_3O_4 là những tam giác vuông cân tại I.

Phép quay tâm I góc -90^0 biến:

O_1 thành O_2; O_3 thành O_4

$\Rightarrow O_1O_3 = O_2O_4$ và $O_1O_3 \perp O_2O_4$ (đpcm)

2. Ta có $Q_{(I,-90^0)}(O_1) = O_2$; $Q_{(I,-90^0)}(O_3) = O_4$;

$Q_{(I,-90^0)}(I) = I$

Do đó $Q_{(I,-90^0)}$ biến ΔIO_1O_3 thành ΔIO_2O_4

Gọi M; N lần lượt là trung điểm của cạnh O_2O_4; O_1O_3. Khi đó ta có IN và IM lần lượt là trung tuyến của ΔIO_1O_3 và ΔIO_2O_4.

$\Rightarrow Q_{(I,-90^0)}(N) = M$

$\Rightarrow IN = IM$ và $IN \perp IM$.

Vậy ΔINM vuông cân tại I.

Gọi K là trung điểm đoạn thẳng BD, tương tự ta chứng minh được ΔKNM vuông cân tại I.

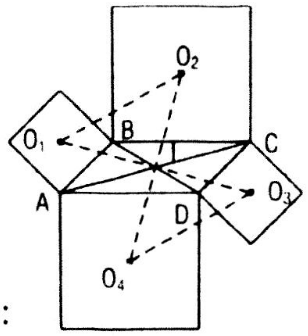
Do đó tứ giác KMIN là hình vuông.

Bài 5: Về phía ngoài hình bình hành ABCD dựng các hình vuông có cạnh lần lượt là AB; BC; CD. Chứng minh rằng: Bốn tâm của bốn hình vuông đó là các đỉnh của một hình vuông.

Giải

Gọi O_1; O_2; O_3; O_4 lần lượt là tâm các hình vuông cạnh AB; BC; CD; DA.

Gọi I là tâm của hình bình hành ABCD.



$\Rightarrow$ I là trung điểm đoạn thẳng AC và BD.

– Xét ΔABC; ΔADC

Ta có I là trung điểm đoạn thẳng AC, theo bài 3 ta có:

ΔIO_1O_2; ΔIO_3O_4 là các tam giác vuông cân tại I

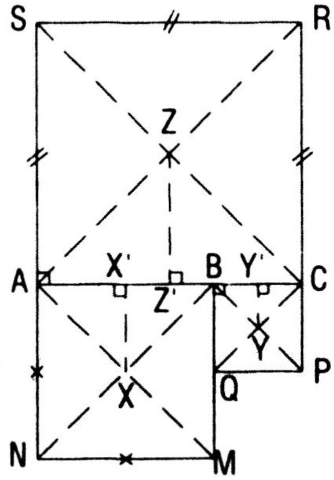
– Xét ΔABD; ΔBCD

Ta có I là trung điểm đoạn thẳng BD, theo bài 3 ta có:

ΔIO_1O_4; ΔIO_3O_2 là các tam giác vuông cân tại I

Vậy các tam giác: ΔIO_1O_2; ΔIO_3O_4; ΔIO_1O_4; ΔIO_3O_2 là các tam giác vuông cân bằng nhau nên tứ giác $O_1O_2O_3O_4$ là hình vuông.

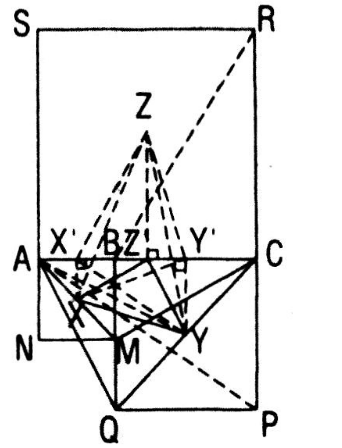
Bài 6: Trên hình vẽ sau đây có ba điểm thẳng hàng A; B; C và ba hình vuông ABMN; BCPQ; ACRS với tâm lần lượt là X; Y; Z. Gọi X'; Y'; Z' lần lượt là trung điểm các cạnh AB;BC; AC.



1. Chứng minh rằng: $\Delta Z'XY$; $\Delta X'YZ$; $\Delta Y'XZ$ là những tam giác vuông cân.
2. Chứng minh rằng: $AY \perp XZ$; $BZ \perp XY$; $CX \perp YZ$ ($AB > BC$ hoặc $AB < BC$)

Giải

1. *– Xét phép quay tâm B góc 90^0* ($Q_{(B,90^0)}$)



$Q_{(B,90^0)}(A) = M$; $Q_{(B,90^0)}(Q) = C$

$\Rightarrow AQ = MC$ và $AQ \perp MC$

Ta có Z'X là đường trung bình của ΔMAC;

Z'Y là đường trung bình của ΔACQ

$\Rightarrow Z'X \,//\, MC$ và $Z'X = \dfrac{1}{2}MC$;

$Z'Y \,//\, AQ$ và $Z'Y = \dfrac{1}{2}AQ$

$\Rightarrow Z'X = Z'Y$ và $Z'X \perp Z'Y$

Vậy $\Delta Z'XY$ là tam giác vuông cân tại Z'.

– Xét phép quay tâm C góc 90^0 ($Q_{(C,90^0)}$)

$Q_{(C,90^0)}(B) = P$; $Q_{(C,90^0)}(R) = A \Rightarrow BR = PA$ và $BR \perp PA$

Mặt khác ta có X'Z là đường trung bình ΔABR;

X'Y là đường trung bình ΔABP

$\Rightarrow ZX' // BR$ và $ZX' = \frac{1}{2}BR$; $X'Y // AP$ và $X'Y = \frac{1}{2}AP$

$\Rightarrow ZX' = X'Y$ và $ZX' \perp X'Y$

Vậy $\Delta ZX'Y$ là tam giác vuông cân tại X'

– Xét phép quay tâm A góc 90^0 ($Q_{(A,90^0)}$)

$Q_{(A,90^0)}(N) = B$; $Q_{(A,90^0)}(C) = S \Rightarrow NC = BS$ và $NC \perp BS$

Mặt khác ta có XY' là đường trung bình của ΔBNC;

ZY' là đường trung bình của ΔBSC

$\Rightarrow XY' // NC$ và $XY' = \frac{1}{2}NC$; $ZY' // BS$ và $ZY' = \frac{1}{2}BS$

$\Rightarrow XY' = ZY'$ và $XY' \perp ZY'$

Vậy $\Delta ZXY'$ là tam giác vuông cân tại Y'.

2. Xét phép quay tâm X' góc 90^0 biến điểm A thành điểm X; biến điểm Y thành điểm Z.

Do đó $AY = XZ$ và $AY \perp XZ$

Các trường hợp khác chứng minh tương tự.

Bài 7: Cho tam giác ABC, gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và P là một điểm nằm trong tam giác ABC. Gọi A'; B'; C' là các điểm đối xứng với P lần lượt qua các đường thẳng AI; BI; CI. Chứng minh các đường thẳng AA'; BB'; CC' đồng quy.

Giải

Gọi M; N; E là các điểm đối xứng với P lần lượt qua các đường thẳng BC; AC; AB

Ta có AE = AP; AP = AN (Tính chất phép đối xứng trục)

$\Rightarrow AE = AN$ (1)

Đặt $\alpha = \widehat{BAP}$; $\beta = \widehat{PAI}$

Ta có $\widehat{EAA'} = \widehat{EAP} + \widehat{PAA'} = 2\alpha + 2\beta$

Mặt khác ta có:

$$\widehat{A'AN} = \widehat{A'AC} + \widehat{CAN} = \widehat{A'AC} + \widehat{CAP} = \alpha + \alpha + 2\beta$$

$\Rightarrow \widehat{A'AN} = 2\alpha + 2\beta$

Vậy $\widehat{EAA'} = \widehat{A'AN}$ (2)

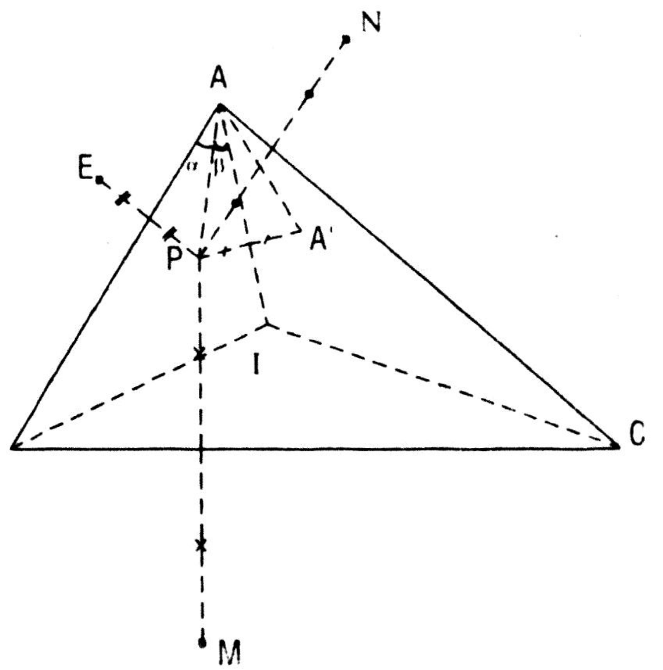
Từ (1)và (2) ta có: AA' là đường trung trực đoạn thẳng EN

Vai trò của các đường thẳng AA'; BB'; CC' và các điểm M; N; E trong bài toán như nhau nên ta cũng có:

– Đường thẳng BB' là đường trung trực đoạn thẳng EM

– Đường thẳng CC' là đường trung trực đoạn thẳng MN

Vậy AA'; BB'; CC' đồng quy tại tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNE



Bài 8: Cho ΔABC. Gọi A'; B'; C
A; B; C. Gọi d_1 là đường thẳng qua A' và vuông góc với BC; d_2 là đường thẳng qua B' và vuông góc với AC; d_3 là đường thẳng qua C' và vuông góc với AB. Chứng minh các đường thẳng d_1; d_2; d_3 đồng quy.

Giải

Nhận xét: Các điểm A; B; C lần lượt nằm trên các cạnh B'C'; C'A'; A'B'. Các đường thẳng AA'; BB'; CC' đi qua tâm O của đường tròn nội tiếp Δ ABC.

Gọi H là giao điểm của đường thẳng

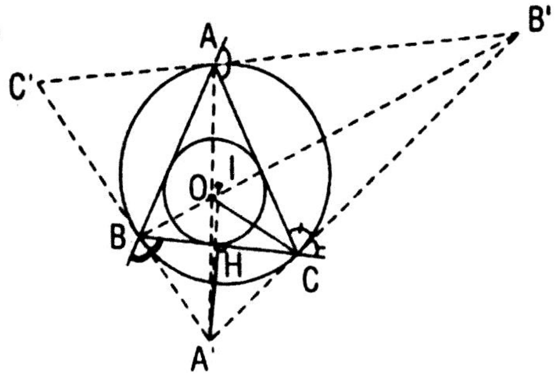
Ta có $\widehat{CA'H} = \widehat{OCB}$

(góc có cạnh tương ứng vuông góc)

Mặt khác tứ giác OBA'C nội tiếp đường tròn nên:

$\widehat{OCB} = \widehat{BA'O}$

$\Rightarrow \widehat{CA'H} = \widehat{BA'O}$ (1)



Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp Δ A'B'C'

$\Rightarrow \widehat{CA'I} = \widehat{BA'I}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{HA'I} = \widehat{OA'I}$

$\Rightarrow$ Đường thẳng $d_1 \equiv$ A'H đối xứng với đường thẳng A'O qua đường phân giác A'I của góc $\widehat{B'A'C'}$.

Do đó đường thẳng $d_1 \equiv$ A'H đi qua điểm A_1 là điểm đối xứng của điểm O qua đường phân giác A'I của góc $\widehat{B'A'C'}$.

Tương tự đường thẳng d_2 đi qua B_1 là điểm đối xứng của O qua đường phân giác B'I của góc $\widehat{A'B'C'}$. Đường thẳng d_3 đi qua C_1 là điểm đối xứng của O qua đường phân giác C'I của góc $\widehat{A'C'B'}$.

Vậy theo bài 7 ta có các đường thẳng d_1; d_2; d_3 đồng quy (đpcm).

Bài 9: Trong hình vuông ABCD lấy một điểm P. Từ A; B; C; D lần lượt dựng các đường thẳng d_1; d_2; d_3; d_4 thỏa $d_1 \perp BP$; $d_2 \perp CP$; $d_3 \perp DP$; $d_4 \perp AP$. Chứng minh rằng bốn đường thẳng d_1; d_2; d_3; d_4 đồng quy.

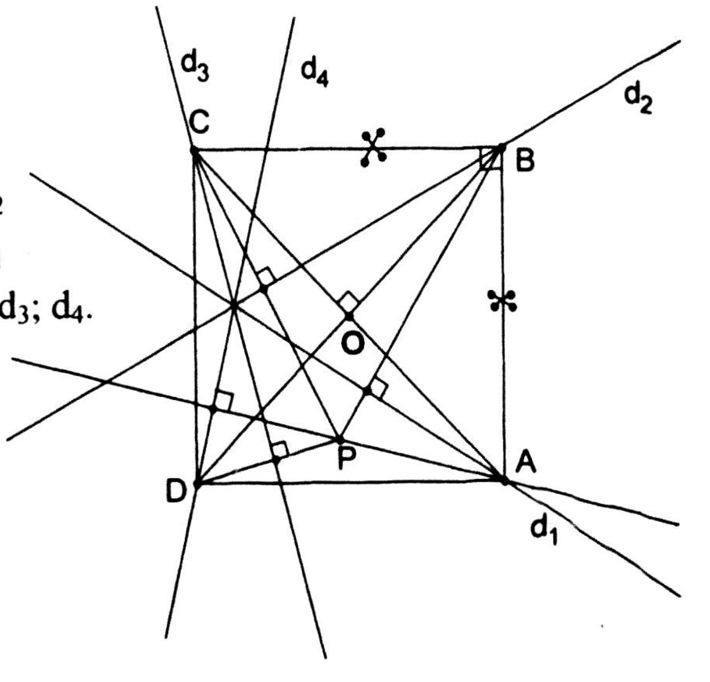
Giải

Gọi O là giao điểm của CA và BD

* Xét phép quay tâm O góc -90^0 ($Q_{(O,-90^0)}$)

Ta có $Q_{(O,-90^0)}(A) = D$; $Q_{(O,-90^0)}(D) = C$; $Q_{(O,-90^0)}(C) = B$; $Q_{(O,-90^0)}(B) = A$

và phép quay $Q_{(O,-90^0)}$ biến:

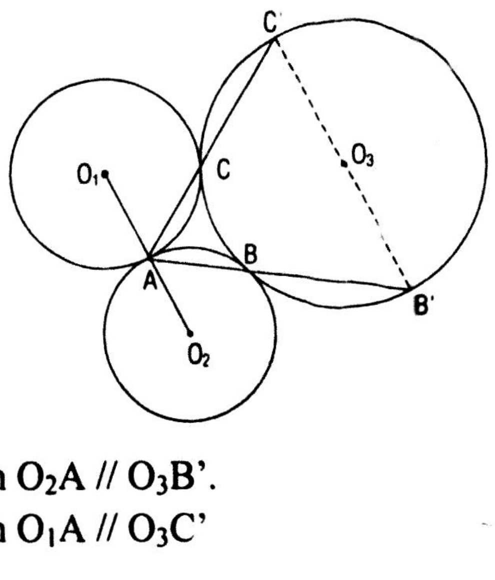


- Đường thẳng PA thành d_4
- Đường thẳng PD thành d_3
- Đường thẳng PC thành d_2
- Đường thẳng PB thành d_1

$\Rightarrow Q_{(O,-90^0)}(P)$ thuộc d_1; d_2; d_3; d_4.

Vậy bốn đường thẳng d_1; d_2; d_3; d_4 đồng quy tại ảnh của P qua phép quay tâm O góc -90^0.

Bài 10: Cho ba đường tròn (O_1); (O_2); (O_3) đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Gọi A là tiếp điểm của(O_1) và (O_2); B là tiếp điểm của (O_3) và (O_2); C là tiếp điểm của (O_1) và (O_3). Đường thẳng AB cắt (O_3) tại điểm thứ hai B', đường thẳng AC cắt (O_3) tại điểm thứ hai C'. Chứng minh rằng đoạn B'C' là đường kính của đường tròn (O_3).



Giải

Ta có B là tâm vị tự của (O_3) và (O_2) nên O_2A // O_3B'.

Ta có C là tâm vị tự của (O_1) và (O_3) nên O_1A // O_3C'

Ta có O_1; A; O_2 thẳng hàng nên B'; O_3; C' thẳng hàng

Vậy đoạn B'C' là đường kính của đường tròn (O_3) (đpcm).

Bài 11: Cho hai phép vị tự $V_{(O_1,k_1)}$ (tâm O_1 tỉ số k_1) và $V_{(O_2,k_2)}$ (tâm O_2 tỉ số k_2).

1. Chứng minh rằng nếu $k_1.k_2 = 1$ thì phép hợp thành của hai phép vị tự $V_{(O_1,k_1)}$ và $V_{(O_2,k_2)}$ là một phép tịnh tiến. Khi đó hãy xác định vectơ tịnh tiến.

2. Chứng minh rằng nếu $k_1.k_2 \neq 1$ thì phép hợp thành của hai phép vị tự $V_{(O_1,k_1)}$ và $V_{(O_2,k_2)}$ là một phép vị tự. Khi đó hãy xác định tâm và tỉ số của phép vị tự.

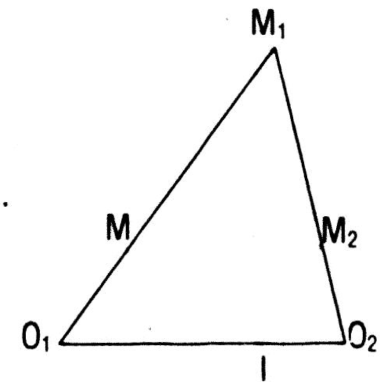
Giải

– *Chú ý*: $V_{(O_1,k_1)}(M) = M_1$; $V_{(O_2,k_2)}(M_1) = M_2$. Khi đó tích của hai phép vị tự $V_{(O_1,k_1)}$ và $V_{(O_2,k_2)}$ biến M thành M_2.

– Ta viết $V_{(O_2,k_2)}(V_{(O_1,k_1)}(M)) = M_2$.

1. Gọi M_1 là ảnh của điểm M bất kì qua phép vị tự tâm O_1 tỉ số k_1 (Phép $V_{(O_1,k_1)}$) và M_2 là ảnh của điểm M_1 qua phép vị tự tâm O_2 tỉ số k_2 (Phép $V_{(O_2,k_2)}$)

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{O_1M_1} = k_1\overrightarrow{O_1M} \\ \overrightarrow{O_2M_2} = k_2\overrightarrow{O_2M_1} \end{cases}$



Xét $V_{(O_2,k_2)}(V_{(O_1,k_1)}(M)) = M_2$

Gọi I là ảnh của O_1 qua phép vị tự tâm O_2 tỉ số k_2.

Ta có $\overrightarrow{O_2I} = k_2\overrightarrow{O_2O_1}$. Ta có:

$$\overrightarrow{IM_2} = \overrightarrow{O_2M_2} - \overrightarrow{O_2I}$$
$$= k_2\overrightarrow{O_2M_1} - k_2\overrightarrow{O_2O_1}$$
$$= k_2(\overrightarrow{O_2M_1} - \overrightarrow{O_2O_1}) = k_2\overrightarrow{O_1M_1} = k_2(k_1\overrightarrow{O_1M}) = k_1.k_2\overrightarrow{O_1M}.$$

Vậy $\overrightarrow{IM_2} = k_1.k_2\overrightarrow{O_1M}$.

Mặt khác ta có $k_1.k_2 = 1$

$\Rightarrow \overrightarrow{IM_2} = \overrightarrow{O_1M}$. Mà $\overrightarrow{IM_2} = \overrightarrow{MM_2} - \overrightarrow{MI}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MM_2} - \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{O_1M}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{O_1I} \Rightarrow \overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2I}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{O_1O_2} + k_2\overrightarrow{O_2O_1}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MM_2} = (1-k_2)\overrightarrow{O_1O_2}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MM_2} = \vec{V}$ (Với $\vec{V} = (1-k_2)\overrightarrow{O_1O_2}$)

Vậy phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{V}$ (phép $T_{\vec{V}}$) biến M thành M_2.

Khi đó $T_{\vec{V}}(M) = M_2$

Do đó tích của hai phép vị tự với tích các tỉ số bằng 1 là một phép tịnh tiến theo $\vec{V} = (1-k_2)\overrightarrow{O_1O_2}$

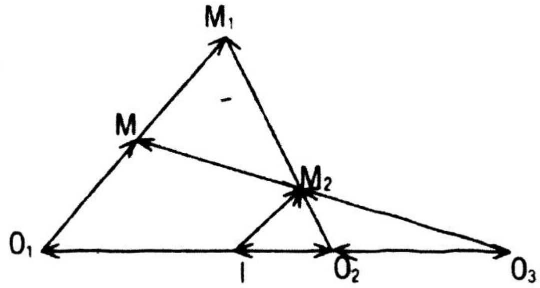
2. Trường hợp: $k_1.k_2 \neq 1$ ta chọn O_3 thỏa $\overrightarrow{O_3I} = k_1.k_2\,\overrightarrow{O_3O_1}$

Khi đó $\overrightarrow{O_3M_2} = \overrightarrow{O_3I} + \overrightarrow{IM_2}$

$= k_1.k_2\,\overrightarrow{O_3O_1} + k_1.k_2\overrightarrow{O_1M}$

$= k_1.k_2\,(\overrightarrow{O_3O_1} + \overrightarrow{O_1M})$

$= k_1.k_2\,\overrightarrow{O_3M}$



Vậy $\overrightarrow{O_3M_2} = k_1.k_2\,\overrightarrow{O_3M}$

Suy ra phép vị tự tâm O_3 tỉ số $k = k_1.k_2$ biến M thành M_2.

Do đó tích của hai phép vị tự với tích các tỉ số khác 1 là một phép vị tự tâm O_3 tỉ số $k = k_1.k_2$.

Cách xác định O_3:

Ta có $\overrightarrow{O_3I} = k_1.k_2\,\overrightarrow{O_3O_1} \Rightarrow \overrightarrow{O_3O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2I} = k_1.k_2\,\overrightarrow{O_3O_1}$ (1)

Mà $\overrightarrow{O_2I} = k_2\overrightarrow{O_2O_1}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\overrightarrow{O_1O_2} + k_2\overrightarrow{O_2O_1} = k_1k_2\overrightarrow{O_3O_1} - \overrightarrow{O_3O_1}$

$\Rightarrow (k_2-1)\overrightarrow{O_1O_2} = (k_1k_2-1)\,\overrightarrow{O_1O_3}$

$\Rightarrow \overrightarrow{O_1O_3} = \dfrac{k_2-1}{k_1k_2-1}\overrightarrow{O_1O_2}$ (Vì $k_1k_2 \neq 1$) (*)

Kết luận:

– Từ (*) suy ra ba điểm O_1; O_2; O_3 thẳng hàng.

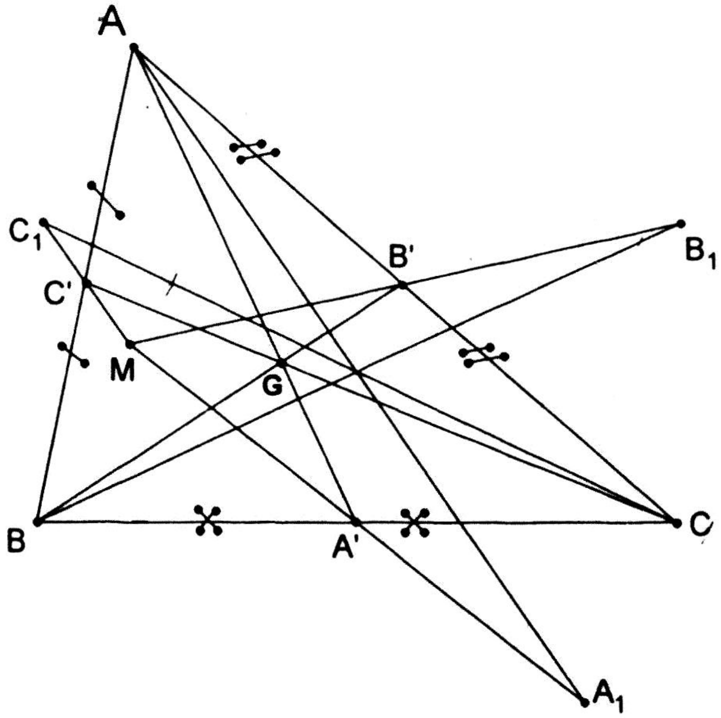
– Thực hiện liên tiếp hai phép vị tự có tích các tỉ số khác 1 là một phép vị tự có tâm được xác định theo (*) và ba tâm của ba phép vị tự này thẳng hàng.

Bài 12: Cho ΔABC có trọng tâm G. Gọi A'; B';C' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC; AC; AB. Điểm M bất kì nằm trong ΔABC. Gọi A_1; B_1; C_1 lần lượt là điểm đối xứng của M qua A'; B'; C'.

1. Xác định phép vị tự biến ΔABC thành $\Delta A'B'C'$
2. Xác định phép vị tự biến $\Delta A'B'C'$ thành $\Delta A_1B_1C_1$

3. Chứng minh rằng các đường thẳng AA_1; BB_1; CC_1 đồng quy tại trung điểm mỗi đường.

Giải



1. Ta có:

$$\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$$

$$\overrightarrow{GB'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$$

$$\overrightarrow{GC'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$$

Vậy phép vị tự $V_{(G,-\frac{1}{2})}$ biến

ΔABC thành $\Delta A'B'C'$

2. Ta có:

$$\overrightarrow{MA_1} = 2\overrightarrow{MA'}$$

$$\overrightarrow{MB_1} = 2\overrightarrow{MB'}$$

$$\overrightarrow{MC_1} = 2\overrightarrow{MC'}$$

Vậy phép vị tự $V_{(M,2)}$ biến $\Delta A'B'C'$ thành $\Delta A_1B_1C_1$

3. Xét hai phép vị tự $V_{(G,-\frac{1}{2})}$; $V_{(M,2)}$ đặt $k_1 = -\frac{1}{2}$; $k_2 = 2$

$\Rightarrow k_1.k_2 = -1 \neq 1$

Theo bài 11 ta có phép hợp thành của hai phép vị tự $V_{(G,-\frac{1}{2})}$; $V_{(M,2)}$ là một phép vị tự có tâm O_3; tỉ số $k = k_1.k_2 = -1$ và O_3 được xác định:

$$\overrightarrow{GO_3} = \frac{k_2 - 1}{k_1k_2 - 1}\overrightarrow{GM} \text{ (theo công thức (*) của bài 11).}$$

Vậy phép vị tự có tâm O_3 ở trên biến:

– Điểm A thành điểm A_1

– Điểm B thành điểm B_1

– Điểm C thành điểm C_1

Do đó các đường thẳng AA_1; BB_1; CC_1 đồng quy tại O_3

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{O_3A_1} = -\overrightarrow{O_3A} \\ \overrightarrow{O_3B_1} = -\overrightarrow{O_3B} \\ \overrightarrow{O_3C_1} = -\overrightarrow{O_3C} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Điểm O_3 là trung điểm của mỗi đoạn thẳng AA_1; BB_1; CC_1.

Vậy các đường thẳng AA_1; BB_1; CC_1 đồng quy tại trung điểm của mỗi đoạn thẳng AA_1; BB_1; CC_1(đpcm).

Bài 13: Cho ba đường tròn $(I_1; R_1)$; $(I_2; R_2)$; $(I_3; R_3)$ không đồng tâm và không bằng nhau. Gọi A; A' lần lượt là tâm vị tự ngoài và tâm vị tự trong của hai đường tròn $(I_1; R_1)$ và $(I_2; R_2)$; gọi B; B' lần lượt là tâm vị tự ngoài và tâm vị tự trong của hai đường tròn $(I_2; R_2)$ và $(I_3; R_3)$; gọi C; C' lần lượt là tâm vị tự ngoài và tâm vị tự trong của hai đường tròn $(I_3; R_3)$ và $(I_1; R_1)$.

1. Chứng minh rằng A; B; C thẳng hàng.
2. Chứng minh rằng A'; B; C' thẳng hàng.
3. Chứng minh rằng A'; B'; C thẳng hàng.
4. Chứng minh rằng A; B'; C' thẳng hàng.

Giải

1. Phép vị tự tâm A tỉ số $k = \dfrac{R_2}{R_1}$ (Phép $V_{(A,k)}$) biến đường tròn $(I_2; R_2)$ thành đường tròn $(I_1; R_1)$.

Phép vị tự tâm B tỉ số $k' = \dfrac{R_3}{R_2}$ (Phép $V_{(B,k')}$) biến đường tròn $(I_3; R_3)$ thành đường tròn $(I_2; R_2)$.

Ta có: $k.k' = \dfrac{R_2}{R_1}.\dfrac{R_3}{R_2} = \dfrac{R_3}{R_1} \neq 1$

Theo bài 11 ta có tích của hai phép vị tự $V_{(A,k)}$; $V_{(B,k')}$ là phép vị tự tỉ số $\dfrac{R_3}{R_1}$ biến đường tròn $(I_1; R_1)$ thành đường tròn $(I_3; R_3)$, tâm của phép vị tự này là điểm C và ta có ba điểm A; B; C thẳng hàng.

Bạn đọc chứng minh tương tự cho các câu còn lại.

Bài 14: Cho hai đường tròn (O_1); (O_2) ngoài nhau và không bằng nhau. Một đường tròn (O) thay đổi tiếp xúc ngoài với (O_1); (O_2) lần lượt tại A; B. Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn luôn đi qua một điểm cố định.

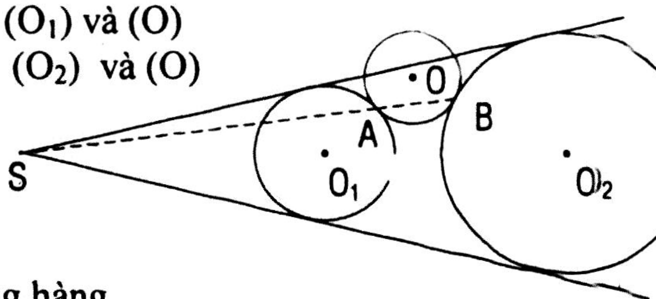
Giải

Điểm A là tâm vị tự trong của (O_1) và (O)

Điểm B là tâm vị tự trong của (O_2) và (O)

Hai tiếp tuyến chung ngoài của (O_1) và (O_2) cắt nhau tại S.

$\Rightarrow$ S là tâm vị tự ngoài của (O_1) và (O_2)

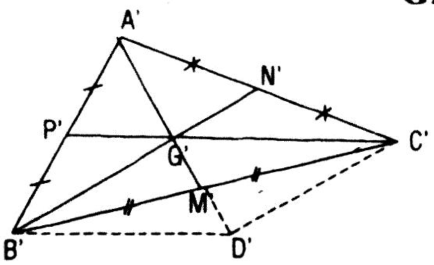


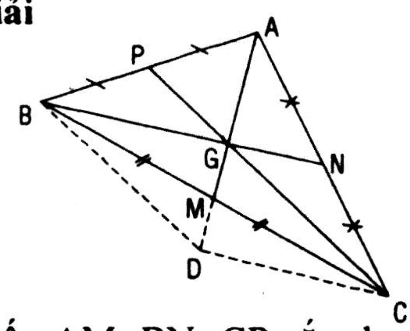
Theo bài 12 ta có A; B; S thẳng hàng.

Vậy đường thẳng AB đi qua điểm S cố định.

Bài 15: Chứng minh rằng nếu ba đường trung tuyến của tam giác ABC lần lượt bằng ba đường trung tuyến của tam giác A'B'C' thì hai tam giác đó bằng nhau.

Giải





Xét tam giác ABC có ba trung tuyến AM; BN; CP cắt nhau tại G. Tam giác A'B'C' có ba trung tuyến A'M'; B'N'; C'P'cắt nhau tại G'thỏa mãn:

AM = A'M'; BN = B'N'; CP = C'P'

Ta lấy điểm D; D'sao cho tứ giác BGCD và tứ giác B'G'C'D' là hình bình hành.

Ta có ΔGCD = ΔG'C'D'

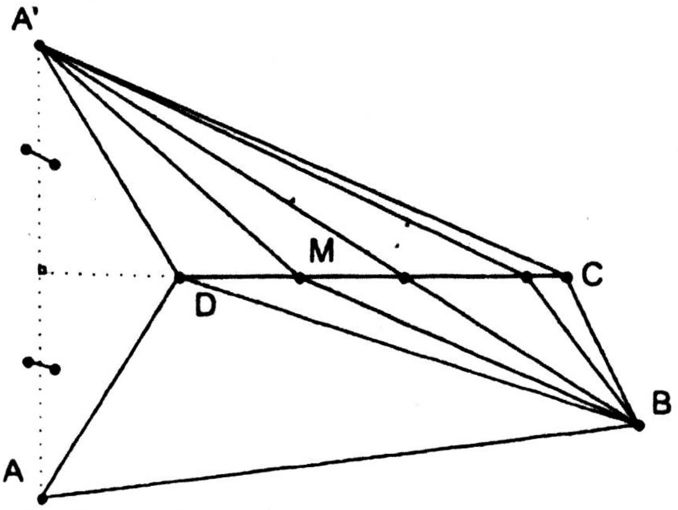
Do đó có phép dời hình f biến G; C; D lần lượt thành G'; C'; D'

Khi đó f biến A thành A'và B thành B' nên hai tam giác ABC và A'B'C' bằng nhau.

Bài 16: Cho tứ giác lồi ABCD. Gọi M là một điểm thuộc cạnh CD (M không trùng C; D).

Chứng minh rằng: MA + MB < Max {CA + CB; DA + DB}.

Giải



Xét A' = Đ$_{CD}$(A)

Ta có M thuộc cạnh CD nên M thuộc Δ A'BC hoặc Δ A'BD

$\Rightarrow$ MA' + MB < CA' + CB

hoặc MA' + MB < DA'+ DB

Mặt khác, ta có: $\begin{cases} MA' = MA \\ CA' = CA \\ DA' = DA \end{cases}$

Do đó MA + MB < CA + CB

hoặc MA + MB < DA+ DB

Vậy: MA + MB < Max {CA + CB; DA + DB}(đpcm).

Bài 17: Chứng minh rằng hai hình vuông bất kỳ đồng dạng với nhau.

Giải

Xét hai hình vuông bất kỳ ABCD và A'D'C'D'. Ta chứng minh hai hình vuông đó đồng dạng.

Bài toán không mất tính tổng quát, giả sử hình vuông ABCD có cạnh a và hình vuông A'B'C'D'có cạnh b. Phép vị tự $V_{(A,\frac{b}{a})}$ biến:

+ Điểm A thành A
+ Điểm B thành B_1
+ Điểm C thành C_1
+ Điểm D thành D_1

Khi đó phép vị tự $V_{(A,\frac{b}{a})}$ biến hình vuông ABCD thành tứ giác $AB_1C_1D_1$.

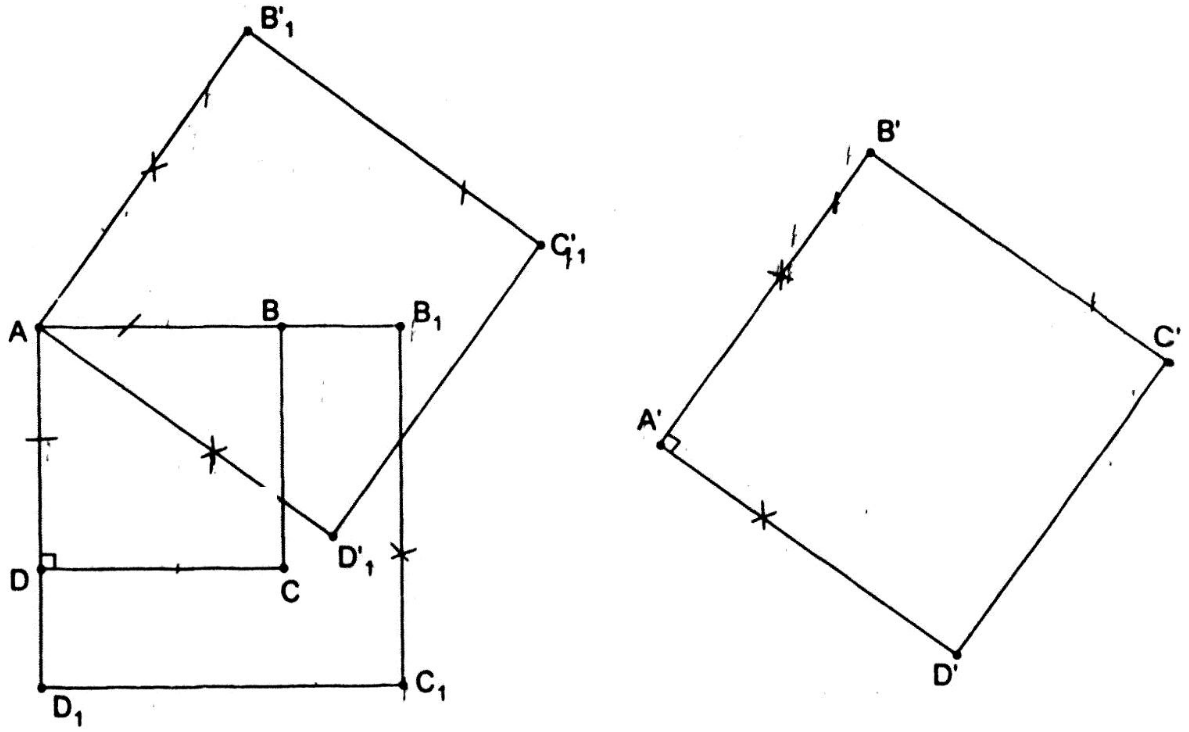
$\Rightarrow$ Tứ giác $AB_1C_1D_1$ là hình vuông và $B_1C_1 = \dfrac{b}{a}.BC = b$.

$\Rightarrow$ Hình vuông $AB_1C_1D_1$ bằng hình vuông A'B'C'D'.

Do đó có một phép dời hình f biến hình vuông $AB_1C_1D_1$ thành hình vuông A'B'C'D'.

Vậy có phép đồng dạng g là phép hợp thành của $V_{(A,\frac{b}{a})}$ và f đã biến hình vuông ABCD thành hình vuông A'B'C'D'.

$\Rightarrow$ Hình vuông ABCD đồng dạng với hình vuông A'B'C'D'(đpcm).



Bài 18: Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi A'; B'; C' lần lượt là trung điểm các cạnh BC; AC; AB. Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔA'B'C'; G và H lần lượt là trọng tâm và trực tâm của ΔABC. Gọi A_1 là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng BC; B_1 là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng AC; C_1 là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB.

1. Chứng minh rằng các điểm O; H; G; J thẳng hàng.

(Đường thẳng đi qua các điểm O; H; G; J được gọi là đường thẳng Euler).

2. Chứng minh rằng các điểm A'; B'; C'; A_1; B_1; C_1; các trung điểm của các đoạn thẳng HA; HB; HC cùng thuộc một đường tròn .

(Đường tròn qua 9 điểm trên được gọi là đường tròn Euler).

Giải

1. Trọng tâm G của ΔABC là giao điểm của các đường trung tuyến AA'; BB'; CC'.

Khi đó phép vị tự $V_{(G,-\frac{1}{2})}$ biến:

+ Điểm A thành điểm A'
+ Điểm B thành điểm B'
+ Điểm C thành điểm C'

Do đó phép vị tự $V_{(G,-\frac{1}{2})}$ biến:

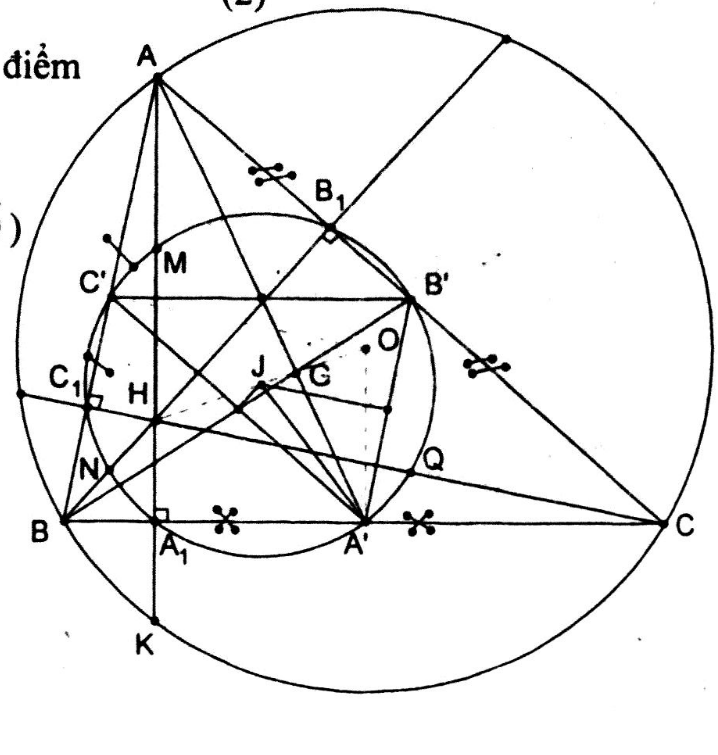
+ ΔABC thành ΔA'B'C'
+ Đường tròn (O) thành đường tròn (J)

$\Rightarrow \overrightarrow{GJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GO}$ (1) và bán kính R; r lần lượt là của đường tròn (O); (J) thoả mãn $r = \frac{1}{2}R$. (a)

Mặt khác ta có các đường trung trực của ΔABC cũng là các đường cao của ΔA'B'C' nên O là trực tâm của ΔA'B'C'

$\Rightarrow$Phép vị tự $V_{(G,-\frac{1}{2})}$ biến điểm H thành điểm O

$\Rightarrow \overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$ (2)



Từ (1) và (2) ta có các điểm O; H; G; J thẳng hàng(đpcm).

2. Từ (1) và (2) ta có:

$\overrightarrow{GJ} - \overrightarrow{GO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GH} - \overrightarrow{GO})$

$\Rightarrow \overrightarrow{OJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OH}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OH}$

$\Rightarrow \overrightarrow{HJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HO}$

$\Rightarrow$Phép vị tự $V_{(H,\frac{1}{2})}$ biến điểm O thành điểm J. (b)

Từ (a) và (b) ta có phép vị tự $V_{(H,\frac{1}{2})}$ biến đường tròn (O) thành đường tròn (J)

Gọi K là giao điểm đường thẳng AA_1 và đường tròn (O)

Ta có $\widehat{BAK} = \widehat{BCC_1}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc).

Mặt khác ta có $\widehat{BAK} = \widehat{BCK}$

$\Rightarrow \widehat{BCK} = \widehat{BCC_1} \Rightarrow HA_1 = KA_1$

$\Rightarrow \overrightarrow{HA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HK}$

$\Rightarrow$ Phép vị tự $V_{(H,\frac{1}{2})}$ biến điểm K thành điểm A_1

Mà K thuộc đường tròn (O) do đó điểm A_1 thuộc đường tròn (J)

Chứng minh tương tự ta có B_1; C_1 thuộc đường tròn (J)

Gọi M; N; Q lần lượt là trung điểm đoạn thẳng HA; HB; HC

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{HM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HA} \\ \overrightarrow{HN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HB} \\ \overrightarrow{HQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HC} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Phép vị tự $V_{(H,\frac{1}{2})}$ biến A; B; C lần lượt là thành các điểm M; N; Q.

Mà A; B; C thuộc đường tròn (O) nên các điểm M; N; Q thuộc đường tròn (J)

Vậy các điểm A'; B'; C'; A_1; B_1; C_1; các trung điểm của các đoạn thẳng HA; HB; HC cùng thuộc một đường tròn (J)(đpcm).

Bài 19: Cho hai đường tròn không bằng nhau (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Trong đường tròn (O) vẽ dây cung AB; trong đường tròn (O') vẽ dây cung AC sao cho AB $\perp$ AC. Gọi I là tâm vị tự ngoài của (O) và (O'). Chứng minh ba điểm B; C; I thẳng hàng.

Giải

Gọi D là điểm đối xứng của C qua O'. Khi đó ta có D thuộc đường tròn (O')

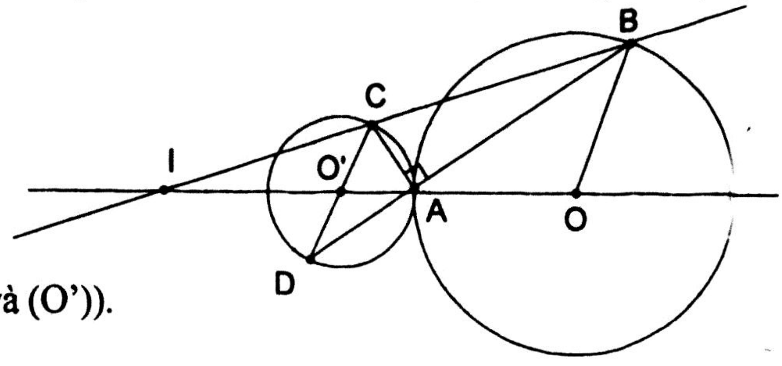
$\Rightarrow \widehat{CAD} = 90^0$

$\Rightarrow$ A; B; D thẳng hàng

$\Rightarrow V_{(A,k)}(B) = D$

(Với $k = -\frac{R'}{R}$; R và R'

lần lượt là bán kính của (O) và (O')).



Mà $V_{(A,k)}(O) = O'$ nên $OB // O'D$

$\Rightarrow OB // O'C$ (1)

Mặt khác ta có $V_{(I,\frac{R'}{R})}(O) = O'$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $V_{(I,\frac{R'}{R})}(B) = C$

$\Rightarrow \overrightarrow{IC} = \dfrac{R'}{R}\overrightarrow{IB}$

$\Rightarrow$ Ba điểm B; C; I thẳng hàng (đpcm).

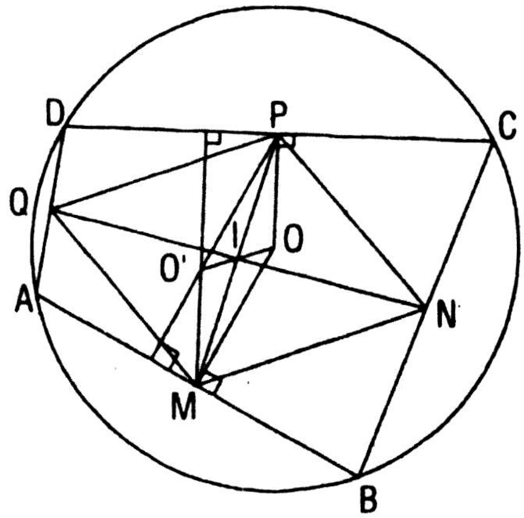
Chú ý: Ta có thể thay bài 19 bởi bài: "Cho hai đường tròn không bằng nhau (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Trong đường tròn (O) vẽ dây cung AB; trong đường tròn (O') vẽ dây cung AC sao cho $AB \perp AC$. Chứng minh đường thẳng BC đi qua điểm cố định."

Bạn đọc trình bày như lời giải sau:

Gọi I là tâm vị tự ngoài của (O) và (O'); trình bày tiếp theo như bài 19 rồi kết luận đường thẳng BC đi qua điểm cố định là tâm vị tự ngoài của (O) và (O')(đpcm).

Bài 20: Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O. Từ M; N; P; Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB; BC; CD; DA ta vẽ các đường thẳng vuông góc với cạnh đối diện. Chứng minh rằng các đường thẳng ấy đồng quy.

Giải



Ta có:

$MN // AC$; $MN = \dfrac{1}{2}AC$

$PQ // AC$; $PQ = \dfrac{1}{2}AC$

$\Rightarrow MN // PQ$ và $MN = PQ$

$\Rightarrow$ Tứ giác MNPQ là hình bình hành.

Gọi I là tâm hình bình hành MNPQ

$\Rightarrow Đ_I(M) = P$; $Đ_I(N) = Q$;

$Đ_I(P) = M$; $Đ_I(Q) = N$.

Gọi O' là ảnh của O qua phép đối xứng tâm $Đ_I$

$\Rightarrow$ Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến đường thẳng PO thành đường thẳng MO'.

$\Rightarrow MO' // PO$.

Mặt khác ta có $DC \perp PO$

$\Rightarrow DC \perp MO'$

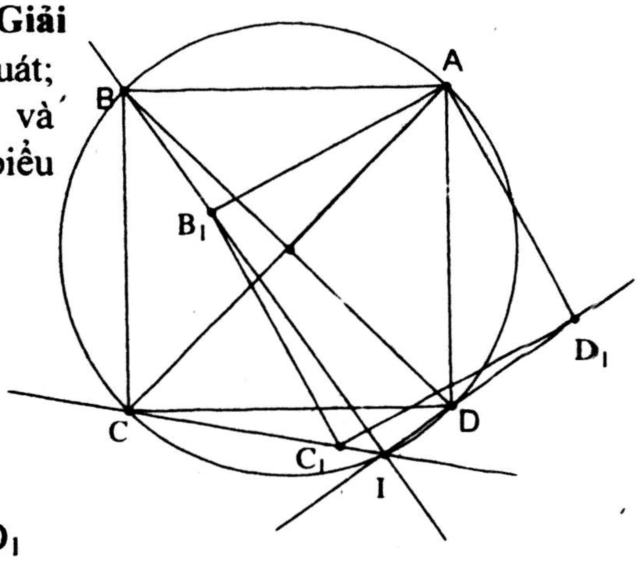
Vậy đường thẳng đi qua M vuông góc với DC luôn qua điểm O'

Chứng minh tương tự ta có ba đường thẳng lần lượt qua N; P; Q theo thứ tự vuông góc với DA; AB; BC đều đi qua điểm O'

Do đó bốn đường thẳng lần lượt qua M; N; P; Q theo thứ tự vuông góc với CD; DA; AB; BC đồng quy tại điểm O'= $Đ_I(O)$ (đpcm).

Bài 21: Cho hai hình vuông ABCD và $AB_1C_1D_1$. Chứng minh rằng các đường thẳng BB_1; CC_1; DD_1 đồng quy.

Giải



Bài toán không mất tính tổng quát; giả sử hai hình vuông ABCD và $AB_1C_1D_1$ thoả mãn đề bài được biểu diễn như hình vẽ bên

Xét phép quay $Q_{(A,90^0)}$; ta có:

$Q_{(A,90^0)}(B) = D$

$Q_{(A,90^0)}(B_1) = D_1$

$\Rightarrow BB_1 = DD_1$; $BB_1 \perp DD_1$

Gọi I là giao điểm của BB_1 và DD_1

$\Rightarrow \widehat{BID} = 90^0$

$\Rightarrow$ I thuộc đường tròn (O) ngoại tiếp hình vuông ABCD (1)

Mặt khác ta có $\widehat{B_1ID_1} = 90^0$

$\Rightarrow$ I thuộc đường tròn (O') ngoại tiếp hình vuông $AB_1C_1D_1$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases} \widehat{CIA} = 90^0 \\ \widehat{C_1IA} = 90^0 \end{cases}$

(Vì AC là một đường kính của (O); AC_1 là một đường kính của (O')).

$\Rightarrow$ C; C_1; I thẳng hàng

$\Rightarrow$ Đường thẳng CC_1 đi qua điểm I

$\Rightarrow$ Ba đường thẳng BB_1; CC_1; DD_1 đồng quy(đpcm).

Bạn đọc giải thêm một số bài sau:

Bài 22: Điểm M di động trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Gọi M_1; M_2; M_3 lần lượt là các điểm đối xứng của M qua CA; BC; AB. Gọi H là trực tâm của ΔABC.

1. Chứng minh rằng M_1; M_2; M_3; H thẳng hàng.

2. Gọi Q; P; R lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên BC; CA; AB. Chứng minh rằng P; R; Q thẳng hàng.

Bài 23: Cho hai đường tròn (O); (O') cắt nhau tại I; J. Từ một điểm P cố định vẽ một cát tuyến cắt (O) tại M; N. Hai đường thẳng JM; JN cắt (O') lần lượt tại M'; N'. Chứng minh rằng đường thẳng M'N' luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 24: Cho hai đường tròn (O); (O') ngoài nhau . Đường tròn (I) cắt (O) tại A; B và cắt (O') tại C; D. Từ một điểm H trên đường tròn (O') vẽ HC; HD cắt đường tròn (I) lần lượt tại M'; N'. Đường thẳng BM'; BN' lần lượt cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là M; N. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn tiếp xúc với đường tròn cố định khi H chạy trên đường tròn (O').

Bài 25: Dựng ở ngoài tam giác ABC những tam giác đều ABC'; BCA'; CAB'.

1. Chứng minh rằng các đường thẳng AA'; BB'; CC' đồng qui tại một điểm I và các đoạn thẳng AA'; BB'; CC' bằng nhau.

2. Giả sử điểm I ở trong tam giác ABC. Trên tia IB ở ngoài đoạn thẳng IB lấy điểm D sao cho: BD = IC. Chứng minh AA' + IA + IB + IC.

3. Nêu tính chất của tam giác A'ID.

Bài toán 2: Dựng hình

Ví dụ:

Bài 1: Cho góc nhọn Oxy. Gọi A là điểm bất kì trong góc nhọn Oxy.

1. Dựng đường thẳng d đi qua A, đường thẳng d cắt Ox; Oy lần lượt tại B; C sao cho điểm A là trung điểm của đoạn thẳng BC.

2. Dựng điểm B; C lần lượt thuộc tia Ox; Oy sao cho Δ ABC có ohu vi nhỏ nhất.

Giải

1. Phân tích:

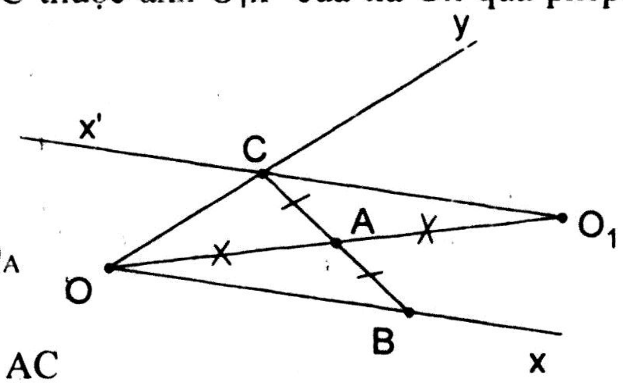
Giả sử đã dựng được đường thẳng d thỏa bài toán. Ta có điểm A là trung điểm đoạn thẳng BC.

$\Rightarrow Đ_A(B) = C$

Gọi $Đ_A(O) = O_1$.

Mặt khác O; B thuộc tia Ox nên C thuộc ảnh O_1x' của tia Ox qua phép đối xứng trục $Đ_A$

$\Rightarrow C = O_1x' \cap Oy$



Cách dựng:

- Dựng $O_1 = Đ_A(O)$
- Dựng ảnh O_1x' của Ox qua $Đ_A$
- Dựng $C = O_1x' \cap Oy$
- Dựng giao điểm B của Oy và AC

Kết luận: Điểm A là trung điểm đoạn thẳng BC

Chứng minh:

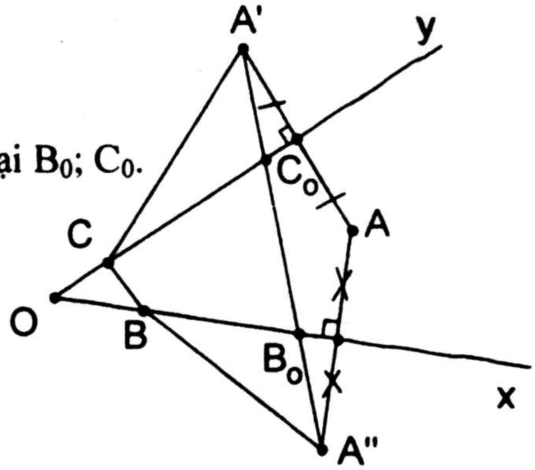
Theo cách dựng ta có: $O_1x' \,//\, Ox$ nên $\widehat{CO_1A} = \widehat{AOB}$

Mặt khác ta có $\begin{cases} \widehat{O_1AC} = \widehat{BAO} \\ OA = AO_1 \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta O_1AC = \Delta OAB$

$\Rightarrow AC = AB$ (đpcm)

2. Phân tích:



Gọi $A' = Đ_{Oy}(A)$; $A'' = Đ_{Ox}(A)$.

Đường thẳng A'A'' cắt Ox; Oy lần lượt tại B_0; C_0.

Khi đó ta có $\begin{cases} C_0A' = C_0A \\ B_0A'' = B_0A \end{cases}$

$\forall B \in Ox$; $\forall C \in Oy$ ta có $\begin{cases} CA' = CA \\ BA'' = BA \end{cases}$

Chu vi ΔABC là:

$2p = AB + BC + CA = A''B + BC + CA' \geq A'A'' = A'C_0 + C_0B_0 + B_0A''$ (*)

Chu vi ΔABC đạt giá trị nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ Bất đẳng thức (*) xảy ra dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases} B \equiv B_0 \\ C \equiv C_0 \end{cases}$

Cách dựng:

– Dựng $A' = Đ_{Oy}(A)$; $A'' = Đ_{Ox}(A)$

– Dựng đường thẳng A'A''

– Dựng giao điểm B của thẳng A'A'' và tia Ox

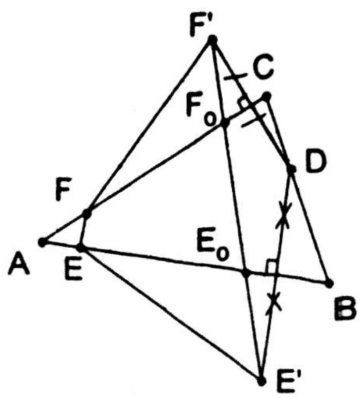
– Dựng giao điểm C của thẳng A'A'' và tia Oy

Kết luận: ΔABC có chu vi nhỏ nhất

Chứng minh: (Dựa vào cách dựng trên bạn đọc trình bày chứng minh).

Chú ý: Xét điểm đặc biệt của câu 2) của bài toán trên ta có bài toán sau:

"Cho ΔABC, trên cạnh BC lấy một điểm D. Dựng E, F lần lượt là các điểm thuộc cạnhAB, AC sao cho ΔDEF có chu vi nhỏ nhất".



Hướng dẫn:

Gọi $E' = Đ_{AB}(D)$; $F' = Đ_{AC}(D)$.

Gọi $E_0 = E'F' \cap AB$ và $F_0 = E'F' \cap AC$ $\forall E \in AB$; $\forall F \in AC$ ta có:

$2p = DE + EF + FD = E'E + EF + FF' \geq E'F' = E'E_0 + E_0F_0 + F_0F'$(a)

Chu vi ΔDEF đạt giá trị nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ Bất đẳng thức (a) xảy ra dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases} E \equiv E_0 \\ F \equiv F_0 \end{cases}$

Bài 2: Cho góc nhọn Oxy, trên tia Oy lấy một điểm S khác O, gọi d là đường thẳng qua S không chứa tia Oy. Hãy dựng đường thẳng d' vuông góc với đường thẳng d và d' cắt Ox; Oy lần lượt tại A; B cách đều đường thẳng d.

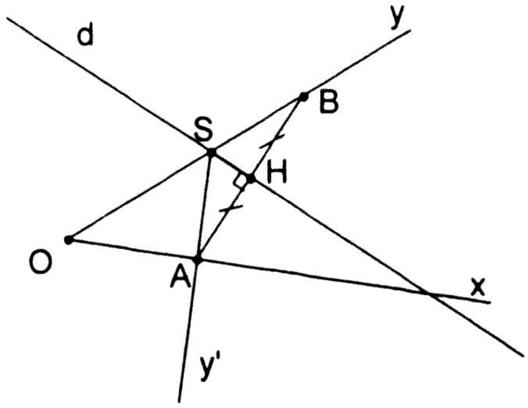
Giải

Phân tích:

Giả sử đã dựng được đường thẳng d' thỏa bài toán; ta có A, B cách đều đường thẳng d.

$\Rightarrow A = Đ_d(B)$

Ta có $A \in Ox$; $S \in d$; $B \in Oy \Rightarrow$ A là giao điểm của Ox và ảnh của Sy qua $Đ_d$.



Cách dựng:

– Dựng ảnh Sy' của Sy qua $Đ_d$

– Dựng $A = Ox \cap Sy'$

– Dựng đường thẳng d' qua A, $d' \perp d$

– Dựng giao điểm B của d' và Oy

Kết luận: A; B cách đều đường thẳng d.

Chứng minh:

Gọi H là giao điểm của d; d'

Theo cách dựng ta có Δ AHS; Δ BHS là các tam giác vuông có cạnh SH chung; $\widehat{ASH} = \widehat{BSH}$

$\Rightarrow \Delta AHS = \Delta BHS$

$\Rightarrow HA = HB$

$\Rightarrow$ A; B cách đều đường thẳng d.

Bài 3: Cho đường tròn (O) với dây cung PQ. Dựng hình vuông ABCD có hai đỉnh A; B nằm trên đường thẳng PQ và hai đỉnh C; D nằm trên đường tròn (O).

Giải

Phân tích:

Giả sử đã dựng được hình vuông ABCD thỏa mãn điều kiện của bài toán

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng PQ

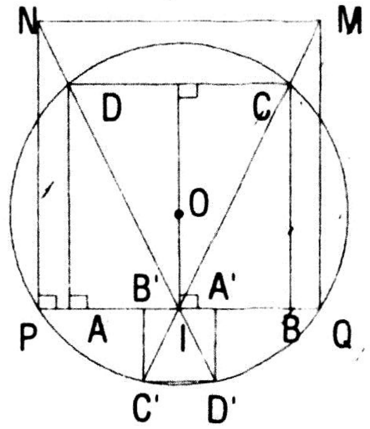
$\Rightarrow$ OI là đường trung trực đoạn thẳng PQ

Do đó OI cũng là đường trung trực đoạn thẳng CD

⇒ OI là đường trung trực đoạn thẳng AB.

Vậy nếu dựng được hình vuông cạnh PQ (Chẳng hạn dựng được hình vuông PQMN như hình vẽ), khi đó đường thẳng IM cắt đường tròn (O) tại C và D = $Đ_{OI}$(C)

Cách dựng:



– Dựng hình vuông PQMN

– Dựng giao điểm C của đường thẳng IM với đường tròn (O)

– Dựng ảnh D của C qua phép đối xứng trục OI ($Đ_{OI}$)

– Dựng hình chiếu vuông góc A của D trên PQ và hình chiếu vuông góc B của C trên PQ

Kết luận: Hình vuông ABCD thỏa mãn điều kiện của bài toán.

Chứng minh:

Theo cách dựng ta có:

– Hình vuông ABCD có hai đỉnh A;B nằm trên dây cung PQ và hai đỉnh C; D nằm trên đường tròn (O) (Đpcm)

Mặt khác do đường thẳng IM cắt đường tròn (O) tại hai điểm nên có hai hình vuông thỏa mãn điều kiện của bài toán.

(Hình vẽ bên có các hình vuông thỏa mãn điều kiện của bài toán là hình vuông ABCD; A'B'C'D')

Bài 4: Cho đường thẳng d và hai đường tròn (O); (O') nằm về hai phía đối với d. Hãy dựng hình vuông ABCD sao cho đường chéo BD nằm trên d, đỉnh A nằm trên đường tròn (O), đỉnh C nằm trên đường tròn (O').

Giải

Nhận xét:

Hai điểm B; D xác định trên đường thẳng d. Khi đó hình vuông ABCD hoàn toàn xác định nếu xác định được điểm A hoặc xác định được điểm C.

Phân tích:

Giả sử đã dựng được hình vuông ABCD thỏa bài toán

Phép đối xứng trục d ($Đ_d$) biến A thành C; biến đường tròn (O) thành đường tròn (O''). Đường tròn đường kính AC đi qua B, D. Vậy B, D là các giao điểm của đường thẳng d và đường tròn đường kính AC.

Cách dựng:

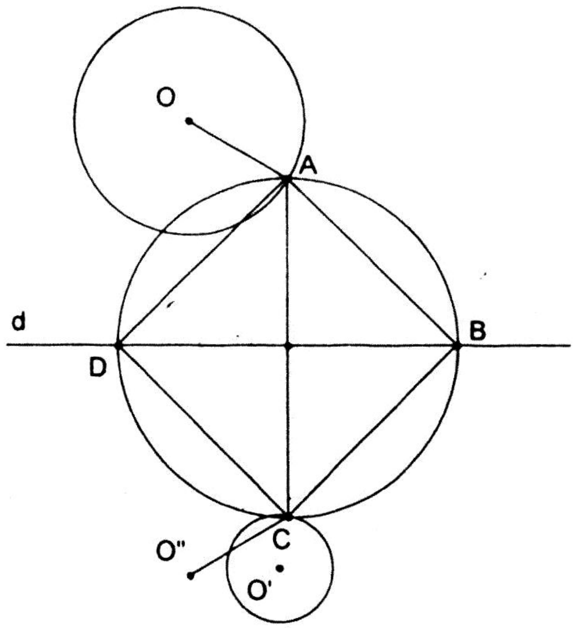
– Dựng ảnh của đường tròn (O) qua $Đ_d$. Gọi ảnh này là (O'')

Gọi C là điểm của đường tròn (O') và (O'').

– Dựng ảnh $Đ_d$ (C). Đó là điểm A

– Dựng đường tròn đường kính AC.

– Dựng giao điểm B; D của đường thẳng d và đường tròn đường kính AC. Tứ giác ABCD là hình vuông thỏa bài toán.



Chứng minh:

Ta có C $\in$ (O')

Theo cách dựng C $\in$ (O''): ảnh của (O) qua $Đ_d$ (1)

và A = $Đ_d$ (C) $\Rightarrow$ C = $Đ_d$ (A) (2)

Từ (1) và(2) ta có A $\in$ (O).

Mặt khác AC $\perp$ BD và AC = BD

Vậy ABCD là hình vuông thỏa bài toán.

– Nếu (O'') và (O') có n điểm chung thì bài toán có n nghiệm hình

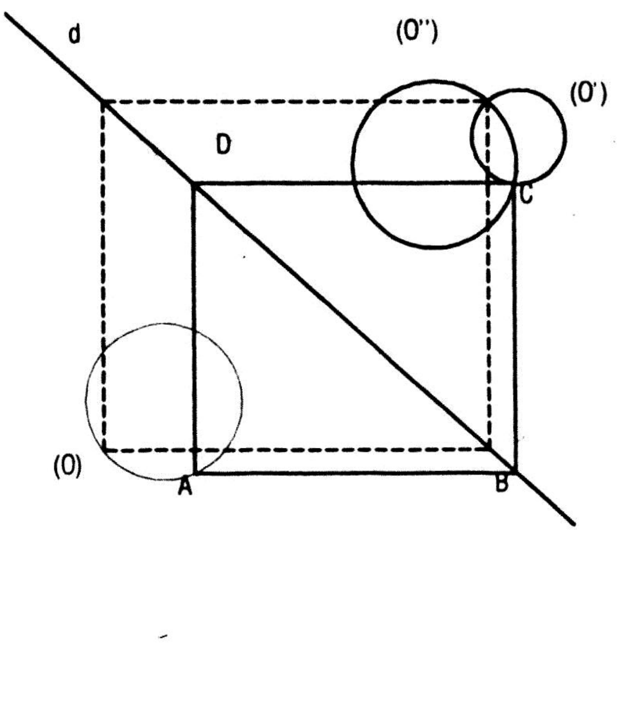
(Đường tròn (O'') và (O') có hơn hai điểm chung khi (O'') và (O') trùng nhau)

Biện luận:

Bài toán có một nghiệm hình nếu đường tròn (O") và đường tròn (O') có một điểm chung.

Bài toán có hai nghiệm hình nếu đường tròn (O") và đường tròn (O') có hai điểm chung.

Bài toán vô nghiệm hình nếu đường tròn (O") và đường tròn (O') không có điểm chung.



Bài 5: Cho hai đường thẳng c, d cắt nhau và hai điểm A, B không thuộc hai đường thẳng đó. Hãy dựng điểm C trên đường thẳng c, điểm D trên đường thẳng d sao cho ABCD là hình thang cân nhận AB là một cạnh đáy.

Giải

Phân tích:

Giả sử đã dựng được hình thang cân ABCD thỏa bài toán.

Gọi a là đường trung trực cạnh AB.

Khi đó phép đối xứng trục $Đ_a$ biến:

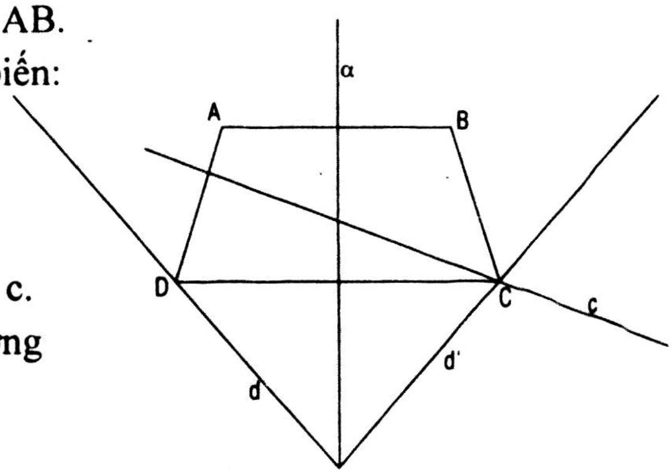
A thành B

D thành C

$\Rightarrow C \in Đ_a(d)$

Mặt khác C thuộc đường thẳng c.

Vậy C là giao điểm của đường thẳng c và d' = $Đ_a(d)$



Cách dựng:

– Dựng đường trung trực a của cạnh AB

– Dưng đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng d qua phép đối xứng trục $Đ_a$.

Gọi C là giao điểm của đường thẳng c và d'

– Dựng ảnh của C qua phép đối xứng trục $Đ_a$. Ta có $Đ_a(C) = D$

Chứng minh:

Theo cách dựng ta có đường thẳng a là đường trung trực của cạnh AB và $Đ_a(C) = D$

$\Rightarrow$ Đường thẳng a là đường trung trực của cạnh CD

Vậy tứ giác ABCD là hình thang cân nhận AB là một cạnh đáy.

Biện luận:

– Nếu d' // c thì bài toán vô nghiệm

– Nếu d' cắt c thì bài toán có một nghiệm duy nhất.

– Nếu d' trùng với c thì bài toán có vô số nghiệm

– Nếu d' cắt c tại điểm C trên đường thẳng a thì D trùng điểm C. Ta có ΔABC cân tại C

– Nếu d' cắt c tại điểm C thuộc đường thẳng AB thì bốn điểm A; B; C; D thẳng hàng.

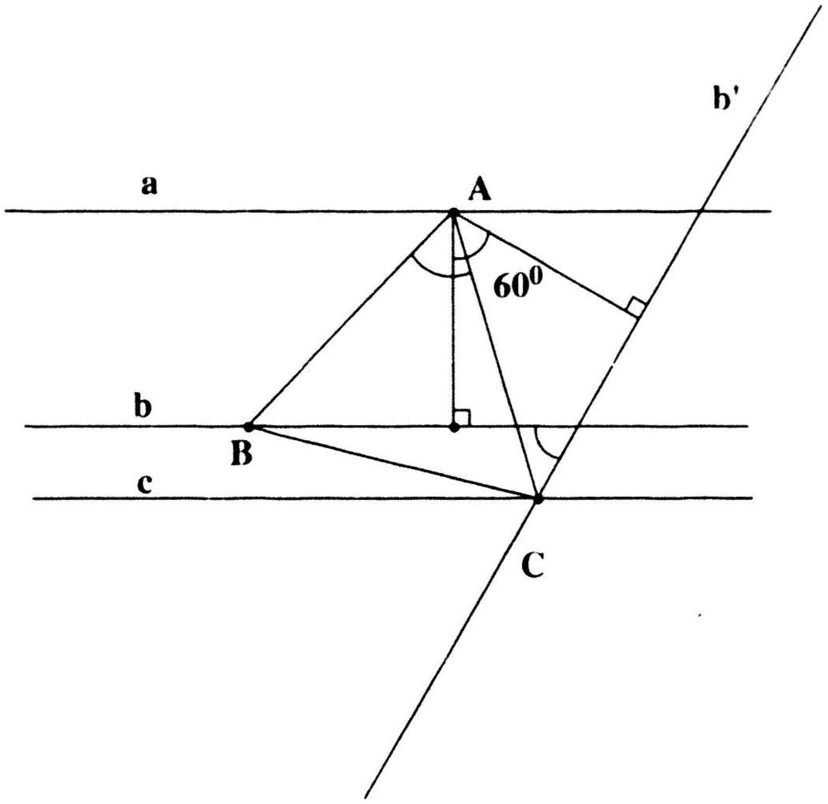
Bài 6: Hãy dựng tam đều có ba đỉnh

1. nằm trên ba đường thẳng song song cho biết trước một đỉnh.
2. nằm trên ba đường tròn đồng tâm cho trước.

Giải

1. *Phân tích:*

Giả sử đã dựng được tam giác ABC đều có ba đỉnh A; B; C lần lượt nằm trên ba đường thẳng song song a; b; c (với A cho trước thuộc đường thẳng a) (hình vẽ)



Khi đó ta có C là ảnh của B qua phép quay $Q_{(A,60^0)}$.

Mặt khác ta có $C \in c$; $B \in b$

Vậy C là giao điểm của c và đường thẳng b' là ảnh của đường thẳng b qua phép quay $Q_{(A,60^0)}$

Khi đã có đỉnh C, suy ra đỉnh B là ảnh của C qua phép quay $Q_{(A,-60^0)}$

Cách dựng:

– Dựng đường thẳng b' = $Q_{(A,60^0)}$ (b). Gọi C là giao điểm của c và b'

– Dựng B = $Q_{(A,-60^0)}$ (C).

Chứng minh:

Theo cách dựng ta có AB = AC và $\widehat{BAC} = 60^0$ nên tam giác ABC đều.

Mặt khác ta có C là giao điểm của c và b' nên C thuộc c.

Ta có b' = $Q_{(A,60^0)}$ (b) nên b = $Q_{(A,-60^0)}$ (b'). Mà B = $Q_{(A,-60^0)}$ (C) và C thuộc đường thẳng b'

$\Rightarrow$ B thuộc đường thẳng b

Vậy tam giác ABC đã dựng thỏa mãn bài toán.

Biện luận:

Ta có thể xác định b' = $Q_{(A,-60^0)}$ (b) và C là giao điểm của c và b'. Khi đó B = $Q_{(A,60^0)}$(C)

Vậy bài toán có hai nghiệm

2. *Phân tích:*

Giả sử đã dựng được tam giác ABC đều có ba đỉnh A; B; C lần lượt nằm trên ba đường tròn đồng tâm (C_1); (C_2); (C_3). (hình vẽ)

Khi đó ta có C là ảnh của B qua phép quay $Q_{(A,60^0)}$.

Mặt khác ta có C $\in$ (C_3) ; B $\in$ (C_2)

Vậy C là giao điểm của (C_3) và (C'_2) là ảnh của (C_2) qua phép quay $Q_{(A,60^0)}$

Khi đã có đỉnh C, suy ra đỉnh B là ảnh của C qua phép quay $Q_{(A,-60^0)}$

Cách dựng:

Chọn một điểm A bất kì thuộc (C_1)

– Dựng (C'_2) là ảnh của (C_2)qua phép quay $Q_{(A,60^0)}$. Gọi C là giao điểm của (C_3) và (C'_2)

– Dựng B = $Q_{(A,-60^0)}$ (C).

Chứng minh:

Theo cách dựng ta có AB = AC và $\widehat{BAC} = 60^0$ nên tam giác ABC đều.

Mặt khác ta có C là giao điểm của (C_3) và (C'_2) nên C $\in$ (C_3)

Ta có (C'_2) là ảnh của (C_2)qua phép quay $Q_{(A,60^0)}$ nên (C_2) là ảnh của (C'_2) qua phép quay $Q_{(A,-60^0)}$. Mà B = $Q_{(A,-60^0)}$ (C) và C thuộc (C'_2)

$\Rightarrow$ B thuộc (C_2).

Vậy tam giác ABC đã dựng thỏa mãn bài toán.

Biện luận:

+ Ta có thể xác định (C'_2) là ảnh của (C_2)qua phép quay $Q_{(A,-60^0)}$ và C là giao điểm của (C_3) và (C'_2) . Khi đó B = $Q_{(A,60^0)}$(C)

+ Giả sử R_1; R_2; R_3 lần lượt là bán kính của (C_1); (C_2); (C_3).

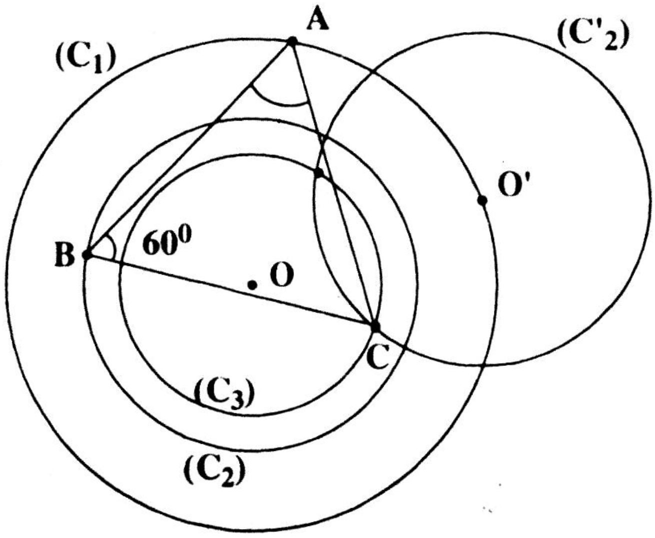
Gọi O là tâm của ba đường tròn (C_1); (C_2); (C_3) và O' = $Q_{(A,60^0)}$ (O).

Khi đó OO' = R_1

– Nếu $R_1 < R_2 + R_3$ thì bài toán có 4 nghiệm

– Nếu $R_1 = R_2 + R_3$ thì bài toán có 2 nghiệm

– Nếu $R_1 > R_2 + R_3$ thì bài toán vô nghiệm



Bài toán 3: Xác định ảnh của một hình qua phép biến hình

Ví dụ:

Bài 1: Tìm ảnh M' của $M(x_o; y_o)$ qua phép đối xứng trục $Đ_d$.

Biết d: $Ax + By + C = 0$ (với $A^2 + B^2 \neq 0$)

Giải

Gọi M'(x'; y')là điểm đối xứng của $M(x_o; y_o)$ qua phép đối xứng trục $Đ_d$

Trường hợp1: Điểm $M(x_o; y_o) \in d$

Khi đó điểm $M' \equiv M(x_o; y_o)$

Trường hợp2: Điểm $M(x_o; y_o) \notin d$

Gọi H là trung điểm đoạn thẳng MM'. Khi đó H là giao điểm của đường thẳng MM' và d

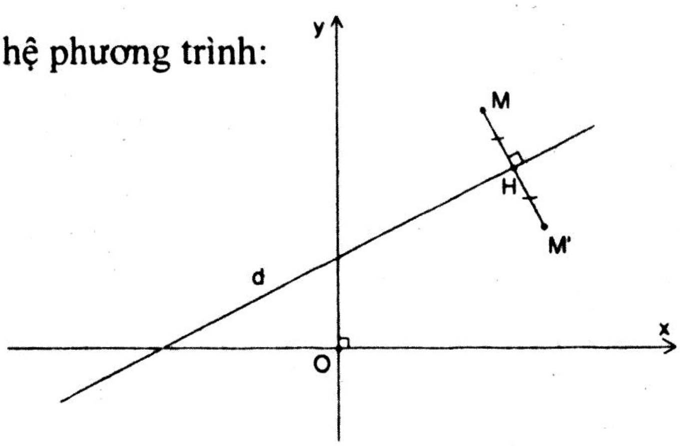
Phương trình đường thẳng MM' là: $B(x - x_o) - A(y - y_o) = 0$

$\Rightarrow Bx - Ay - Bx_o + Ay_o = 0$

Toạ độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} Bx - Ay - Bx_0 + Ay_0 = 0 \\ Ax+By+C=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{B^2x_0 - BAy_0 - AC}{B^2 + A^2} \\ y = \dfrac{A^2y_0 - BAx_0 - BC}{B^2 + A^2} \end{cases}$$



Vậy $H\left(\dfrac{B^2x_0 - BAy_0 - AC}{B^2 + A^2}; \dfrac{A^2y_0 - BAx_0 - BC}{B^2 + A^2}\right)$

Mặt khác ta có:

$$\begin{cases} x' + x_0 = 2.\dfrac{B^2x_0 - BAy_0 - AC}{B^2 + A^2} \\ y' + y_0 = 2.\dfrac{A^2y_0 - BAx_0 - BC}{B^2 + A^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 2.\dfrac{B^2x_0 - BAy_0 - AC}{B^2 + A^2} - x_0 \\ y' = 2.\dfrac{A^2y_0 - BAx_0 - BC}{B^2 + A^2} - y_0 \end{cases} \quad (\mathrm{I})$$

Vậy $M'\left(2.\dfrac{B^2x_0 - BAy_0 - AC}{B^2 + A^2} - x_0; 2.\dfrac{A^2y_0 - BAx_0 - BC}{B^2 + A^2} - y_0\right)$ (*)

Bài 2: Tìm ảnh M' của M(11; 3) qua phép đối xứng trục $Đ_d$.

Biết d: $4x + 3y - 3 = 0$

Giải

Ta có: $4.11 + 3.3 - 3 \neq 0 \Rightarrow M(11; 3) \notin d$

Gọi M'(x'; y')là điểm đối xứng của M(11; 3) qua phép dối xứng trục $Đ_d$

Cách 1: (Trình bày như bài 1 với toạ độ điểm M và phương trình đường thẳng d cụ thể).

Gọi H là trung điểm đoạn thẳng MM'. Khi đó H là giao điểm của đường thẳng MM' và d

Phương trình đường thẳng MM' là:

$3(x - 11) - 4(y - 3) = 0$

$\Rightarrow 3x - 4y - 21 = 0$

Toạ độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 3 = 0 \\ 3x - 4y - 21 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases}$$

Vậy H(3; –3)

Mặt khác ta có:

$$\begin{cases} x' + 11 = 2.3 \\ y' + 3 = 2.(-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -5 \\ y' = -9 \end{cases} \Rightarrow M'(-5; -9)$$

Chú ý: Có thể trình bày lời giải bài toán trên bằng cách giải bài 1 rồi áp dụng công thức (*) để có toạ độ điểm M'.

Cách 2:

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng d.

Ta có: $H \in d$ và $\overrightarrow{MH} \perp \vec{u}$ (với $\vec{u} = (3; -4)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d)

$$\Rightarrow \begin{cases} H(3a; 1-4a) \\ \overrightarrow{MH} = (3a-11; -4a-2) \perp \vec{u} \end{cases}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{MH}.\vec{u} = 3(3a-11) + (-4)(-4a-2) = 0$

$\Rightarrow a = 1 \Rightarrow H(3; -3)$

Mặt khác ta có H là trung điểm đoạn thẳng MM' nên suy ra:

$$\begin{cases} x'+11 = 2.3 \\ y'+3 = 2.(-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -5 \\ y' = -9 \end{cases} \Rightarrow M'(-5; -9)$$

Bài 3: Tìm phương trình đường thẳng a'. Biết a' là ảnh của đường thẳng a qua phép đối xứng trục $Đ_d$.

Xét a; d như sau:

1. a: $x + y + 1 = 0$; d: $x + y - 3 = 0$
2. a: $x - 3y + 11 = 0$; d: $3x + y - 3 = 0$
3. a: $x - 3y + 3 = 0$; d: $4x + 3y - 3 = 0$

Giải

1. *Nhận xét*: Ta có a // d nên a' // a

Cách 1: (Dùng kết quả bài 1theo công thức (I))

Xét $M(x_o; y_o)$ bất kì thuộc a $\Rightarrow x_o + y_o + 1 = 0$ (1)

Gọi M'(x'; y')là điểm đối xứng của $M(x_o; y_o)$ qua phép đối xứng trục $Đ_d$

Ta có $M(x_o; y_o) \in a \Rightarrow M'(x'; y') \in a'$

Theo công thức (I) của bài 1 ta có:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{2(x_0 - y_0 + 3)}{2} - x_0 \\ y' = \dfrac{2(y_0 - x_0 + 3)}{2} - y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 = 3 - x' \\ x_0 = 3 - y' \end{cases} (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được: $(3 - x') + (3 - y') + 1 = 0 \Rightarrow x' + y' - 7 = 0$

Vậy phương trình đường thẳng a' là: $x + y - 7 = 0$

Cách 2: (Dùng kết quả bài 1 theo công thức (*))

Ta có $A(0; -1) \in a \Rightarrow A'(4; 3)$ là điểm đối xứng của A qua đường thẳng d

$\Rightarrow A'(4; 3) \in a'$

Đường thẳng a' // a và đường thẳng a' đi qua A'(4; 3) nên phương trình đường thẳng a' là:

$1.(x - 4) + 1.(y - 3) = 0 \Rightarrow x + y - 7 = 0$

Cách 3:

Ta có $A(0; -1) \in a \Rightarrow A'(4; 3) \in a'$

Ta có $B(-1; 0) \in a \Rightarrow B'(3; 4) \in a'$(Theo công thức (*) của bài 1)

Đường thẳng a' đi qua điểm A'(4; 3) và nhận $\overrightarrow{A'B'} = (-1; 1)$ làm vectơ chỉ phương nên phương trình đường thẳng a' là: $\frac{x-4}{-1} = \frac{y-3}{1} \Rightarrow x + y - 7 = 0$

2. a: $x - 3y + 11 = 0$; d: $3x + y - 3 = 0$

Nhận xét: Ảnh của đường thẳng a vuông góc đường thẳng d qua phép đối xứng trục $Đ_d$ là chính nó.

Ta có $\overrightarrow{n_1} = (1; -3)$ là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng a và $\overrightarrow{n_2} = (3; 1)$ là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng d

Mặt khác ta có $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 1.3 + (-3).1 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}$

$\Rightarrow a \perp d \Rightarrow a' \equiv a: x - 3y + 11 = 0$

3. a: $x - 3y + 3 = 0$; d: $4x + 3y - 3 = 0$

Nhận xét:

– Đường thẳng a; d không song song với nhau.

– Đường thẳng a; d không vuông góc với nhau.

– Đường thẳng a; d không trùng nhau.

Vậy: Ảnh của đường thẳng a qua phép đối xứng trục $Đ_d$ là đường thẳng a' đi qua giao điểm của a và d.

Cách 1:

Toạ độ giao điểm I của đường thẳng a và đường thẳng d là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 3y + 3 = 0 \\ 4x + 3y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow I(0; 1)$$

Vậy $I(0; 1) \in a'$

Ta có $A(-3; 0) \in a \Rightarrow A'(\frac{9}{5}; \frac{18}{5}) \in a'$(Theo công thức (*) của bài 1)

Đường thẳng a' đi qua I(0; 1) và nhận $\overrightarrow{IA'} = \frac{1}{5}(9; 13)$ làm vectơ chỉ phương nên phương trình đường thẳng a' là:

$$\frac{x}{9} = \frac{y-1}{13} \Rightarrow 13x - 9y + 9 = 0$$

Kết luận: Phương trình đường thẳng a' là: $13x - 9y + 9 = 0$

Cách 2: (Dùng kết quả bài 1 theo công thức (*))

Xét $M(x_o; y_o)$ bất kì thuộc a $\Rightarrow x_o - 3y_o + 3 = 0$ (a)

Gọi M'(x'; y') là điểm đối xứng của $M(x_o; y_o)$ qua phép đối xứng trục $Đ_d$

Ta có $M(x_o; y_o) \in a \Rightarrow M'(x'; y') \in a'$

Theo công thức (I) của bài 1 ta có:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-8(4x_0 + 3y_0 - 3)}{25} + x_0 \\ y' = \dfrac{-6(4x_0 + 3y_0 - 3)}{25} + y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x_0 + 24y_0 - 24 + 25x' = 0 \\ 24x_0 - 7y_0 - 18 + 25y' = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{24 - 7x' - 24y'}{25} \\ y_0 = \dfrac{18 - 24x' + 7y'}{25} \end{cases} \text{(b)}$$

Thay (b) vào (a) ta được: $\dfrac{24 - 7x' - 24y'}{25} - 3.\dfrac{18 - 24x' + 7y'}{25} + 3 = 0$

$\Rightarrow 65x' - 45y' + 45 = 0 \Rightarrow 13x' - 9y' + 9 = 0$

Vậy phương trình đường thẳng a' là: $13x' - 9y' + 9 = 0$

Bài 4: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy.

Cho đường tròn (C): $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ và đường thẳng d: $x - y - 1 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng d. Tìm tọa độ các giao điểm của (C) và (C').

Giải

Chú ý:

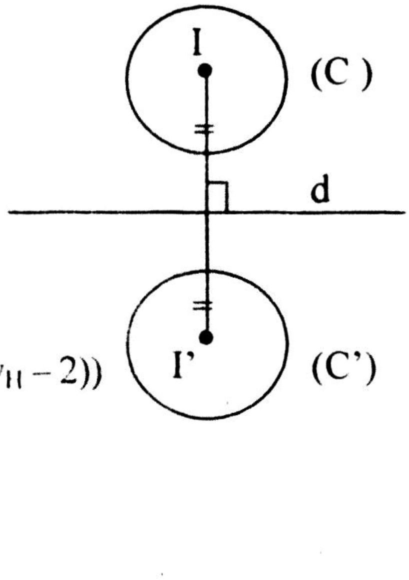
– Nếu $I \in d$ thì $(C') \equiv (C)$

– Nếu $I \notin d$ thì (C') có tâm I' là ảnh của tâm I của (C) qua đường thẳng d và đường tròn (C') có bán kính bằng bán kính của đường tròn (C)

Cách 1:

Đường tròn (C) có tâm I(1; 2), bán kính R = 2.

Gọi $H(x_H; y_H)$ là hình chiếu vuông góc của I trên đường thẳng d: $x - y - 1 = 0$.



Ta có hệ $\begin{cases} x_H - y_H - 1 = 0 \\ \overrightarrow{IH} \perp \vec{u} = (1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H - y_H - 1 = 0 \\ \overrightarrow{IH}.\vec{u} = 0 \end{cases}$

($\vec{u}$: là một vectơ chỉ phương của d; $\overrightarrow{IH} = (x_H - 1; y_H - 2)$)

$\Rightarrow \begin{cases} x_H - y_H - 1 = 0 \\ x_H - 1 + y_H - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_H = 2 \\ y_H = 1 \end{cases}$

Vậy H(2; 1)

Đường tròn (C') có tâm I', bán kính R'

$\Rightarrow$ I' đối xứng I qua đường thẳng d, R' = R = 2

Ta có: H là trung điểm đoạn II'

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{I'} = 2x_H - x_I = 4 - 1 = 3 \\ y_{I'} = 2y_H - y_I = 2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow I'(3;\,0)$$

$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn (C') là: $(x-3)^2 + y^2 = 4$

Cách 2: (Dùng kết quả bài 1 theo công thức (I))

Xét $M(x_0; y_0)$ bất kì thuộc đường tròn $(C) \Rightarrow (x_0 - 1)^2 + (y_0 - 2)^2 = 4$ (1)

Gọi $M'(x'; y')$ là điểm đối xứng của $M(x_0; y_0)$ qua phép đối xứng trục $Đ_d$

Ta có $M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow M'(x'; y') \in (C')$

Theo công thức (I) của bài 1 ta có:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-2(x_0 - y_0 - 1)}{2} + x_0 \\ y' = \dfrac{2(x_0 - y_0 - 1)}{2} + y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = y_0 + 1 \\ y' = x_0 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 = -1 + x' \\ x_0 = 1 + y' \end{cases} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$(1 + y' - 1)^2 + (-1 + x' - 2)^2 = 4 \Rightarrow (x' - 3)^2 + (y')^2 = 4$$

Vậy phương trình đường tròn (C') là: $(x-3)^2 + y^2 = 4$

****Xác định tọa độ các giao điểm của (C) và (C')***

Tọa độ giao điểm của (C) và (C') là nghiệm của hệ phương trình:

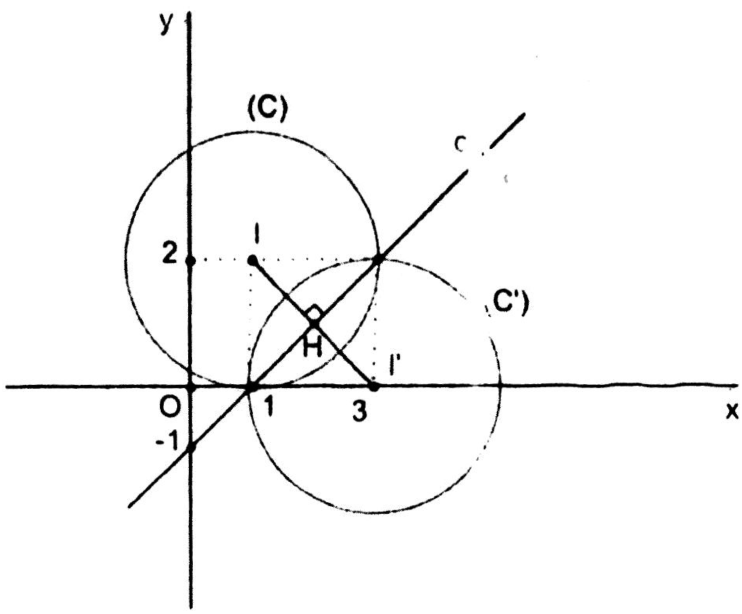
$$\begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = 4 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = 4 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + (x-1)^2 = 4 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right. \\ y = x - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \end{array}\right.$$



Vậy hai đường tròn (C) và (C') có các giao điểm là: (1;), (3;2)

Bài 5: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 27 = 0$ và đường thẳng d: $2x - y - 3 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng d.

Giải

Cách 1:

Đường tròn (C) có tâm I(5; 2), bán kính $R = \sqrt{2}$. Gọi $H(x_H; y_H)$ là hình chiếu vuông góc của I trên đường thẳng d: $2x - y - 3 = 0$.

Khi đó ta có: $\begin{cases} H(a; 2a-3) \\ \overrightarrow{IH} \perp \vec{u} = (1; 2) \end{cases}$

($\vec{u}$: là một vectơ chỉ phương của d; $\overrightarrow{IH} = (a - 5; 2a - 5)$)

$\Rightarrow \overrightarrow{IH}.\vec{u} = (a - 5) + 2(2a - 5) = 0$

$\Rightarrow 5a - 15 = 0 \Rightarrow a = 3$

Vậy H(3; 3)

Đường tròn (C') có tâm I', bán kính R'

$\Rightarrow$ I' đối xứng I qua đường thẳng d, $R' = R = \sqrt{2}$

Ta có: H là trung điểm đoạn II'

$\Rightarrow \begin{cases} x_{I'} = 2x_H - x_I = 6 - 5 = 1 \\ y_{I'} = 2y_H - y_I = 6 - 2 = 4 \end{cases} \Rightarrow I'(1; 4)$

$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn (C') là: $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 2$

Cách 2: (Dùng kết quả bài 1 theo công thức (I))

Xét $M(x_0; y_0)$ bất kì thuộc đường tròn (C)

$\Rightarrow x_0^2 + y_0^2 - 10x_0 - 4y_0 + 27 = 0$

$\Rightarrow (x_0 - 5)^2 + (y_0 - 2)^2 = 2$ (1)

Gọi M'(x'; y')là điểm đối xứng của $M(x_0; y_0)$ qua phép đối xứng trục $Đ_d$

Ta có $M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow M'(x'; y') \in (C')$

Theo công thức (I) của bài 1 ta có:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-4(2x_0 - y_0 - 3)}{5} + x_0 \\ y' = \dfrac{2(2x_0 - y_0 - 3)}{5} + y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x' = -3x_0 + 4y_0 + 12 \\ 5y' = 4x_0 + 3y_0 - 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{-3x' + 4y' + 12}{5} \\ y_0 = \dfrac{4x' + 3y' - 6}{5} \end{cases} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được: $(\frac{-3x'+4y'+12}{5}-5)^2+(\frac{4x'+3y'-6}{5}-2)^2=2$

$\Rightarrow (-3x' + 4y' - 13)^2 + (4x'+3y'-16)^2 = 50$

$\Rightarrow (x')^2 + (y')^2 - 2x' - 8y' + 15 = 0$

$\Rightarrow (x'- 1)^2 + (y' - 4)^2 = 2$

Vậy phương trình đường tròn (C') là: $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 2$

Bài 6: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy. Tìm ảnh M' của $M(x_0; y_0)$ qua phép quay $Q_{(O,\alpha)}$

Giải

Xét $M(x_0; y_0)$ bất kì thuộc mặt phẳng Oxy

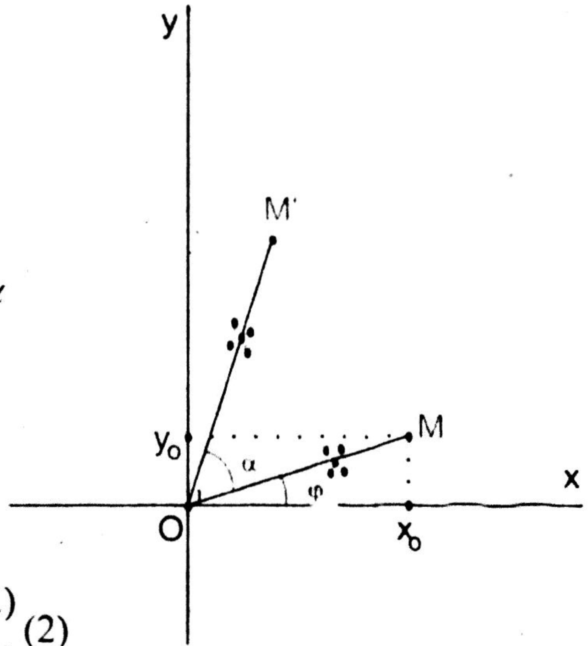
Gọi $M'(x'; y')$ là ảnh của $M(x_0; y_0)$ qua phép quay $Q_{(O,\alpha)}$

$\Rightarrow OM' = OM$ và $(OM; OM') = \alpha$

Đặt $(Ox; OM) = \varphi$

Khi đó ta có:

$$\begin{cases} x_o = OM.\cos\varphi \\ y_o = OM.\sin\varphi \end{cases} (1)$$



Mặt khác ta có: $(Ox; OM') = \varphi + \alpha$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = OM'.\cos(\varphi+\alpha) \\ y' = OM'.\sin(\varphi+\alpha) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = OM.\cos(\varphi+\alpha) \\ y' = OM.\sin(\varphi+\alpha) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = OM.(\cos\varphi.\cos\alpha - \sin\varphi.\sin\alpha) \\ y' = OM.(\sin\varphi.\cos\alpha + \cos\varphi.\sin\alpha) \end{cases} (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được: $\begin{cases} x' = x_o.\cos\alpha - y_o.\sin\alpha \\ y' = y_o.\cos\alpha + x_o.\sin\alpha \end{cases}$ (I)

$\Rightarrow M'(x_o.\cos\alpha - y_o.\sin\alpha ;\ y_o.\cos\alpha + x_o.\sin\alpha)$.

Vậy ảnh của $M(x_0; y_0)$ qua phép quay $Q_{(O,\alpha)}$ là:

$M'(x_o.\cos\alpha - y_o.\sin\alpha ;\ y_o.\cos\alpha + x_o.\sin\alpha)$.(*)

Bài 7: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, tìm ảnh M' của $M(x_0; y_0)$ qua phép quay $Q_{(I,\alpha)}$. Biết I(a; b).

Giải

Xét $M(x_0; y_0)$ bất kì thuộc mặt phẳng Oxy

Gọi $M'(x'; y')$ là ảnh của $M(x_0; y_0)$ qua phép quay $Q_{(I,\alpha)}$

$\Rightarrow$ IM' = IM và (IM; IM') = α

Dời hệ toạ độ Oxy về gốc I bằng cách tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ thành hệ toạ độ IXY. Công thức đổi hệ toạ độ là: $\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}$

Trong hệ toạ độ IXY ta có M'(X'; Y') và M(X_o; Y_o) thoả mãn:

$$\begin{cases} X' = x' - a \\ Y' = y' - b \end{cases} ; \begin{cases} X_o = x_o - a \\ Y_o = y_o - b \end{cases} \text{(a)}$$

Trong hệ toạ độ IXY theo công thức (I) của bài 6 ta có:

$$\begin{cases} X' = X_o.\cos\alpha - Y_o.\sin\alpha \\ Y' = Y_o.\cos\alpha + X_o.\sin\alpha \end{cases} \quad (1)$$

Thay (a) vào (1) ta được:

$$\begin{cases} x' - a = (x_o - a).\cos\alpha - (y_o - b).\sin\alpha \\ y' - b = (y_o - b).\cos\alpha + (x_o - a).\sin\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = (x_o - a).\cos\alpha - (y_o - b).\sin\alpha + a \\ y' = (y_o - b).\cos\alpha + (x_o - a).\sin\alpha + b \end{cases} \quad (*)$$

Vậy M'($(x_o - a).\cos\alpha - (y_o - b).\sin\alpha + a; (y_o - b).\cos\alpha + (x_o - a).\sin\alpha + b$).(t

Có thể áp dụng bài 7 để giải các bài toán sau:

Bài 8: Trong mặt phẳng Oxy. Tìm ảnh M' của M(2; 2) qua phép quay $Q_{(I,\alpha)}$. Biết I(0; 1), $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$

Giải

Gọi M'(x'; y') là ảnh của M qua phép quay $Q_{(I,\alpha)}$

$\Rightarrow$ IM' = IM và (IM; IM') = α

Theo công thức (*) của bài 7 ta có:

$$\begin{cases} x' = (x_M - x_I).\cos\alpha - (y_M - y_I).\sin\alpha + x_I \\ y' = (y_M - y_I).\cos\alpha + (x_M - x_I).\sin\alpha + y_I \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = (2-0).\cos\dfrac{\pi}{4} - (2-1).\sin\dfrac{\pi}{4} + 0 = 2.\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y' = (2-1).\cos\dfrac{\pi}{4} + (2-0).\sin\dfrac{\pi}{4} + 1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 2.\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 3.\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 1 \end{cases}$$

Vậy M'($\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $3.\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 1$)

Bài 9: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, tìm phương trình của đường tròn (C'). Biết (C') là ảnh của đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + y + 1 = 0$ qua phép quay $Q_{(I,\alpha)}$; I(1; 0); $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Giải

Cách 1:

Xét $M(x_o; y_o)$ bất kì thuộc đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + y + 1 = 0$

$\Rightarrow x_o^2 + y_o^2 - 2x_o + y_o + 1 = 0$

$\Rightarrow (x_o - 1)^2 + (y_o + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ (1)

Gọi M'(x'; y')là ảnh của M qua phép quay $Q_{(I,\alpha)}$

$\Rightarrow$ IM' = IM và (IM; IM') = α

Theo công thức (*) của bài 7 ta có: $\begin{cases} x' = (x_o - x_I).\cos\alpha - (y_o - y_I).\sin\alpha + x_I \\ y' = (y_0 - y_I).\cos\alpha + (x_o - x_I).\sin\alpha + y_I \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = (x_o - 1).\cos\frac{\pi}{2} - (y_o - 0).\sin\frac{\pi}{2} + 1 = -y_o + 1 \\ y' = (y_0 - 0).\cos\frac{\pi}{2} + (x_o - 1).\sin\frac{\pi}{2} + 0 = x_o - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_o = -x' + 1 \\ x_o = y' + 1 \end{cases} (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được:

$$(y' + 1 - 1)^2 + (-x' + 1 + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow (x' - \frac{3}{2})^2 + (y')^2 = \frac{1}{4}$$

Vậy phương trình đường tròn (C') là: $(x - \frac{3}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

Cách 2:

Đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + y + 1 = 0$ có tâm $J(1; -\frac{1}{2})$; bán kính $R = \frac{1}{2}$

Gọi R'; J' lần lượt là bán kính và tâm của đường tròn (C')

$\Rightarrow R' = R = \frac{1}{2}$; J' là ảnh của J qua phép quay $Q_{(I,\alpha)}$ (với I(1; 0); $\alpha = \frac{\pi}{2}$).

$\Rightarrow J'(\frac{3}{2}; 0)$ (theo công thức (b) của bài 7).

Vậy phương trình đường tròn (C') là: $(x - \frac{3}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

Bài 10: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, tìm ảnh M' của $M(x_o; y_o)$ qua phép vị tự $V_{(I,k)}$. Biết I(a; b).

Giải

Xét $M(x_o; y_o)$ bất kì thuộc mặt phẳng Oxy

Gọi $M'(x'; y')$là ảnh của $M(x_o; y_o)$ qua phép vị tự $V_{(I,k)}$.

Ta có: $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$ (Với $\overrightarrow{IM'} = (x' - a; y' - b)$; $\overrightarrow{IM} = (x_o - a ; y_o - b)$).

$$\Rightarrow \begin{cases} x' - a = k(x_o - a) \\ y' - b = k(y_o - b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = kx_o + (1-k)a \\ y' = ky_o + (1-k)b \end{cases} (*)$$

Vậy $M'(kx_o + (1-k)a; ky_o + (1-k)b)$

Có thể áp dụng bài 10 để giải bài toán sau:

Bài 11: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy. Tìm ảnh M' của M(1; 3) qua phép vị tự $V_{(I,k)}$. Biết I(2; 4); k = – 5.

Giải

Gọi $M'(x'; y')$ là ảnh của M qua phép vị tự $V_{(I,k)}$.

Theo công thức (*) của bài 10 ta có:

$$\begin{cases} x' = kx_M + (1-k)x_I = (-5).1 + 6.2 = 7 \\ y' = ky_M + (1-k)y_I = (-5).3 + 6.4 = 9 \end{cases}$$

Vậy M'(7; 9).

Chú ý: Bạn đọc có thể trình bày lời giải bài 11 như bài 10 với $x_o = 1; y_o = 3;$ $a = 2; b = 4; k = -5$. (không dùng công thức (*)).

Bài 12: Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho phép vị tự tâm $I(1; -\frac{1}{2})$; tỉ số k = 3.

1. Tìm phương trình đường thẳng d'.
   Biết d'là ảnh của đường thẳng d: 3x + 6y + 7 = 0 qua phép vị tự $V_{(I,k)}$.
2. Tìm phương trình đường tròn (C').
   Biết (C') là ảnh của đường tròn (C): $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 9$ qua phép vị tự $V_{(I,k)}$.
3. Tìm phương trình đường tròn (C').
   Biết (C') là ảnh của đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 14 = 0$ qua phép vị tự $V_{(I,k)}$.

Giải

1. ***Cách 1:***

Xét $M(x_o; y_o)$ bất kì thuộc đường thẳng d:

$$3x + 6y + 7 = 0 \Rightarrow 3x_o + 6y_o + 7 = 0 \quad (1)$$

Gọi M'(x'; y')là ảnh của $M(x_o; y_o)$ qua phép vị tự $V_{(I,k)}$(với $I(1; -\frac{1}{2})$; k = 3).

$\Rightarrow \overrightarrow{IM'} = 3\overrightarrow{IM}$ (Với $\overrightarrow{IM'} = (x' - 1; y' + \frac{1}{2})$; $\overrightarrow{IM} = (x_o - 1; y_o + \frac{1}{2})$).

$$\Rightarrow \begin{cases} x'-1 = 3(x_o - 1) \\ y'+\frac{1}{2} = 3(y_o + \frac{1}{2}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_o = \frac{x'+2}{3} \\ y_o = \frac{y'-1}{3} \end{cases} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được: $3.\frac{x'+2}{3} + 6.\frac{y'-1}{3} + 7 = 0 \Rightarrow x' + 2y' + 7 = 0$

Vậy phương trình đường thẳng d' là: x + 2y + 7 = 0

Cách 2:

Ta có: $3.1 + 6.(-\frac{1}{2}) + 7 \neq 0 \Rightarrow I(1; -\frac{1}{2}) \notin d: 3x + 6y + 7 = 0$

Vậy d' // d nên phương trình đường thẳng d' có dạng: 3x + 6y + C = 0; ($C \neq 7$).

Ta có $A(-\frac{7}{3}; 0)$ thuộc đường thẳng d: 3x + 6y + 7 = 0.

Gọi A'(x'; y') là ảnh của A qua phép vị tự $V_{(I,k)}$ (với $I(1; -\frac{1}{2})$; k = 3).

$\Rightarrow \overrightarrow{IA'} = 3\overrightarrow{IA}$ (với $\overrightarrow{IA'} = (x' - 1; y' + \frac{1}{2})$; $\overrightarrow{IA} = (-\frac{10}{3}; \frac{1}{2})$).

$$\Rightarrow \begin{cases} x'-1 = 3(-\frac{10}{3}) \\ y'+\frac{1}{2} = 3.\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -9 \\ y' = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow A'(-9; 1) \in d': 3x + 6y + C = 0$

$\Rightarrow 3(-9) + 6 + C = 0 \Rightarrow C = 21$(thoả mãn điều kiện)

Vậy phương trình đường thẳng d' là: $3x + 6y + 21 = 0 \Rightarrow x + 2y + 7 = 0$

2. *Cách 1:*

Xét $M(x_o; y_o)$ bất kì thuộc đường tròn (C): $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 9$

$\Rightarrow (x_o - 3)^2 + (yo + 5)^2 = 9$ (1)

Gọi M'(x'; y') là ảnh của $M(x_o; y_o)$ qua phép vị tự $V_{(I,k)}$(với $I(1; -\frac{1}{2})$; k = 3).

$\Rightarrow M'(x'; y') \in (C')$; $\overrightarrow{IM'} = 3\overrightarrow{IM}$

(Với $\overrightarrow{IM'} = (x' - 1; y' + \frac{1}{2})$; $\overrightarrow{IM} = (x_o - 1; y_o + \frac{1}{2})$).

$$\Rightarrow \begin{cases} x'-1 = 3(x_o - 1) \\ y' + \frac{1}{2} = 3(y_o + \frac{1}{2}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_o = \dfrac{x'+2}{3} \\ y_o = \dfrac{y'-1}{3} \end{cases} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$(\frac{x'+2}{3} - 3)^2 + (\frac{y'-1}{3} + 5)^2 = 9 \Rightarrow (x' - 7)^2 + (y' + 14)^2 = 81$$

Vậy phương trình đường tròn (C') là: $(x - 7)^2 + (y + 14)^2 = 81$

Cách 2:

Đường tròn (C): $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 9$ có tâm $A(3; - 5)$; bán kính $R = 3$

Gọi R'; A' lần lượt là bán kính và tâm của đường tròn (C')

$\Rightarrow R' = 3R = 9$; $A'(x'; y')$ là ảnh của A qua phép vị tự $V_{(I,k)}$(với $I(1; -\frac{1}{2})$; $k = 3$).

$\Rightarrow \overrightarrow{IA'} = 3\overrightarrow{IA}$ (với $\overrightarrow{IA'} = (x' - 1; y' + \frac{1}{2})$; $\overrightarrow{IA} = (2; -\frac{9}{2})$).

$$\Rightarrow \begin{cases} x'-1 = 6 \\ y' + \frac{1}{2} = -\frac{27}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 7 \\ y' = -14 \end{cases} \Rightarrow A'(7; -14).$$

Vậy phương trình đường tròn (C') là: $(x - 7)^2 + (y + 14)^2 = 81$

3. ***Cách 1:***

Xét $M(x_o; y_o)$ bất kì thuộc đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 14 = 0$

$\Rightarrow x_o^2 + y_o^2 - 10x_o - 8y_o + 14 = 0 \Rightarrow (x_o - 5)^2 + (y_o - 4)^2 = 27$ (1)

Gọi $M'(x'; y')$ là ảnh của $M(x_o; y_o)$ qua phép vị tự $V_{(I,k)}$(với $I(1; -\frac{1}{2})$; $k = 3$).

$\Rightarrow M'(x'; y') \in (C')$; $\overrightarrow{IM'} = 3\overrightarrow{IM}$

(Với $\overrightarrow{IM'} = (x' - 1; y' + \frac{1}{2})$; $\overrightarrow{IM} = (x_o - 1; y_o + \frac{1}{2})$).

$$\Rightarrow \begin{cases} x'-1 = 3(x_o - 1) \\ y' + \frac{1}{2} = 3(y_o + \frac{1}{2}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_o = \dfrac{x'+2}{3} \\ y_o = \dfrac{y'-1}{3} \end{cases} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$\left(\frac{x'+2}{3}-5\right)^2+\left(\frac{y'-1}{3}-4\right)^2=27 \Rightarrow (x'-13)^2+(y'-13)^2=243$$

Vậy phương trình đường tròn (C') là: $(x-13)^2+(y-13)^2=243$.

Cách 2:

Đường tròn (C): $x^2+y^2-10x-8y+14=0$ có tâm A(5; 4); bán kính $R=3\sqrt{3}$

Gọi R'; A' lần lượt là bán kính và tâm của đường tròn (C')

$\Rightarrow$ $R'=3R=9\sqrt{3}$; A'(x'; y') là ảnh của A qua phép vị tự $V_{(I,k)}$ (với $I(1;-\frac{1}{2})$; k = 3).

$\Rightarrow \overrightarrow{IA'}=3\overrightarrow{IA}$ (với $\overrightarrow{IA'}=(x'-1;\, y'+\frac{1}{2})$; $\overrightarrow{IA}=(4;\frac{9}{2})$).

$$\Rightarrow \begin{cases} x'-1=12 \\ y'+\frac{1}{2}=\frac{27}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=13 \\ y'=13 \end{cases} \Rightarrow A'(13;13).$$

Vậy phương trình đường tròn (C') là: $(x-13)^2+(y-13)^2=243$.

Bài 13: Cho hình vuông ABCD có tâm I. Trên tia BC lấy một điểm E sao cho BE = AI.

1. Xác định phép dời hình biến A thành B và I thành E.
2. Dựng ảnh của hình vuông ABCD qua phép dời hình trên.

Giải

1. Gọi a là đường trung trực của cạnh AB; b là đường trung trực của cạnh IE

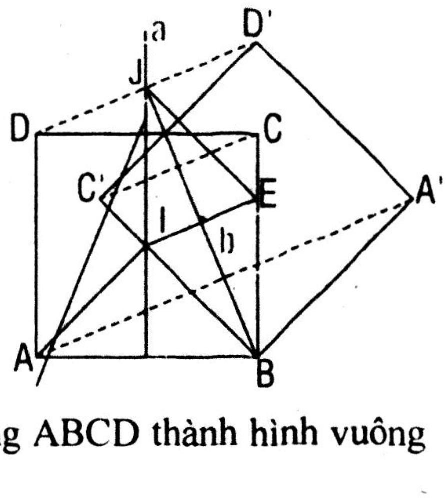
Ta có $Đ_a(I)=I$; $Đ_a(A)=B$;

$Đ_b(I)=E$; $Đ_b(B)=B$

Do đó phép đối xứng trục $Đ_a$ biến đường thẳng IA thành đường thẳng IB;

phép đối xứng trục $Đ_b$ biến đường thẳng IB thành đường thẳng IE

Vậy phép hợp thành của $Đ_a$; $Đ_b$ (là một phép dời hình) biến đường thẳng IA thành đường thẳng BE



Chú ý : Phép dời hình tìm được không phải là duy nhất. Bạn đọc có thể tìm nhiều phép dời hình khác biến đường thẳng IA thành đường thẳng BE

2. Ta có phép đối xứng trục $Đ_a$ biến A; B; C; D theo thứ tự thành B; A; D; C.

Phép đối xứng trục $Đ_b$ biến B; A; D; C theo thứ tự thành B; A'; C'; D' (Hình vẽ)

Vậy phép hợp thành của $Đ_a$; $Đ_b$ biến hình vuông ABCD thành hình vuông BA'C'D"

Bài 14: Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{v} = (3; 1)$ và đường thẳng d: $2x - y = 0$. Tìm ảnh d' của d qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay $Q_{(I,\alpha)}$ và phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$. Biết:

1. Điểm I trùng với gốc toạ độ O(0; 0); $\alpha = 90^0$
2. Điểm I(2; 1); $\alpha = 90^0$
3. Điểm I(–2; 2); $\alpha = 30^0$

Giải

1. ***Cách 1:***

Gọi M(x'; y') là ảnh của điểm $M(x_o; y_o)$ bất kì thuộc đường thẳng d: $2x - y = 0$ qua phép quay $Q_{(O,\alpha)}$.

Theo công thức (I) của bài 6 ta có:

$$\begin{cases} x' = x_o.\cos\alpha - y_o.\sin\alpha \\ y' = y_o.\cos\alpha + x_o.\sin\alpha \end{cases} \text{(với } \alpha = 90^0\text{)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = -y_o \\ y' = x_o \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_o = y' \\ y_o = -x' \end{cases} \text{(a)}$$

Mặt khác ta có: $M(x_o; y_o) \in$ d: $2x - y = 0 \Rightarrow 2x_o - y_o = 0$ (b)

Thay (a) vào (b) ta được: $2y' + x' = 0$ (c)

Giả sử M'(x'; y') thoả mãn: $T_{\vec{v}}(M') = M''(x''; y'')$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} x'' = a + x' \\ y'' = b + y' \end{cases} \text{(với } \vec{v} = (a; b) = (3; 1)\text{)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'' = 3 + x' \\ y'' = 1 + y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x'' - 3 \\ y' = y'' - 1 \end{cases} \text{(d)}$$

Thay (d) vào (c) ta được: $2(y'' - 1) + (x'' - 3) = 0 \Rightarrow x'' + 2y'' - 5 = 0$

Ta có M''(x''; y'') là ảnh của M qua qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay $Q_{(I,\alpha)}$ và phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$.

$\Rightarrow M''(x''; y'') \in d'$

Vậy phương trình đường thẳng d' là: $x + 2y - 5 = 0$

Cách 2:

Gọi d_1 là ảnh của d qua phép quay $Q_{(O,\alpha)}$ (với $\alpha = 90^0$) $\Rightarrow d \perp d_1$ và d' là ảnh của d_1 qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$

Ta có $O(0; 0) \in$ d: $2x - y = 0$ nên d_1 qua O(0; 0)

Vậy d_1 qua O(0; 0) và $d \perp d_1$ nên phương trình đường thẳng d_1 là:

$1(x-0)+2(y-0)=0 \Rightarrow x+2y=0$

Ta có $\vec{u}=(2;-1)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d_1: $x+2y=0$

$\Rightarrow \vec{u}$; $\vec{v}$ không cùng phương $\Rightarrow d_1 // d'$

$\Rightarrow$ Phương trình d' có dạng: $x+2y+C=0$ ($C \neq 0$)

Ta có ảnh của $O(0; 0) \in d_1$ qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ là $O'(x'_o; y'_o)$ thuộc d'

Mặt khác ta có: $\begin{cases} x'_o = a+0=3 \\ y'_o = b+0=1 \end{cases}$

$\Rightarrow O'(3; 1) \in d' \Rightarrow 3+2.1+C=0 \Rightarrow C=-5$

Vậy phương trình đường thẳng d' là: $x+2y-5=0$

2. *Cách 1:*

Gọi $M(x'; y')$ là ảnh của điểm $M(x_o; y_o)$ bất kì thuộc đường thẳng d: $2x-y=0$ qua phép quay $Q_{(I,\alpha)}$. (với $I(2; 1)$; $\alpha = 90^0$)

Theo công thức (*) của bài 7 ta có:

$$\begin{cases} x' = (x_o-2).\cos 90^0 - (y_o-1).\sin 90^0 + 2 \\ y' = (y_o-1).\cos 90^0 + (x_o-2).\sin 90^0 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 3-y_o \\ y' = x_o-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_o = y'+1 \\ y_o = 3-x' \end{cases} (1)$$

Mặt khác ta có: $M(x_o; y_o) \in$ d: $2x-y=0 \Rightarrow 2x_o - y_o = 0$ (b)

Thay (1) vào (b) ta được: $2(y'+1)-(3-x')=0$

$$\Rightarrow x'+2y'-1=0 \ (2)$$

Giả sử $M'(x'; y')$ thoả mãn: $T_{\vec{v}}(M') = M''(x''; y'')$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} x'' = a+x' \\ y'' = b+y' \end{cases} \text{(với } \vec{v}=(a; b)=(3; 1))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'' = 3+x' \\ y'' = 1+y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x''-3 \\ y' = y''-1 \end{cases} (d)$$

Thay (d) vào (2) ta được: $(x''-3)+2(y''-1)-1=0 \Rightarrow x''+2y''-6=0$

Ta có $M''(x''; y'')$ là ảnh của M qua qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay $Q_{(I,\alpha)}$ và phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$.

$\Rightarrow M''(x''; y'') \in d'$

Vậy phương trình đường thẳng d' là: $x+2y-6=0$

Cách 2:

Gọi d_1 là ảnh của d qua phép quay $Q_{(I,\alpha)}$ (với $I(2; 1)$; $\alpha = 90^0$)

$\Rightarrow d \perp d_1$ và d' là ảnh của d_1 qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$

Ta có $O(0; 0) \in$ d: $2x-y=0$ nên d_1 đi qua $O'(x'; y') = Q_{(I,\alpha)}(O)$

Theo công thức (*) của bài 7 ta có:

$$\begin{cases} x' = (0-2).\cos90^0 - (0-1).\sin90^0 + 2 \\ y' = (0-1).\cos90^0 + (0-2).\sin90^0 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 3 \\ y' = -1 \end{cases} \Rightarrow O'(3;-1)$$

Ta có d $\perp$ d_1 và d_1 qua O'(3; – 1) nên phương trình đường thẳng d_1 là:

$1(x-3) + 2(y+1) = 0 \Rightarrow x + 2y - 1 = 0$

Ta có $\vec{u} = (2;-1)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d_1: $x + 2y - 1 = 0$

$\Rightarrow$ $\vec{u}$; $\vec{v}$ không cùng phương $\Rightarrow$ d_1 // d'

$\Rightarrow$ Phương trình d' có dạng: $x + 2y + C = 0$ ($C \neq -1$)

Ta có ảnh của $O'(3;-1) \in d_1$ qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ là O"(x'_0; y'_0) thuộc d'

Mặt khác ta có: $\begin{cases} x'_0 = a + 3 = 6 \\ y'_0 = b - 1 = 0 \end{cases}$ (vì $\vec{v} = (a; b) = (3; 1)$)

$\Rightarrow O''(6; 0) \in d' \Rightarrow 6 + 2.0 + C = 0 \Rightarrow C = -6$

Vậy phương trình đường thẳng d' là: $x + 2y - 6 = 0$

1. ***Cách 1:***

Gọi M(x'; y') là ảnh của điểm M(x_0; y_0) bất kì thuộc đường thẳng d: $2x - y = 0$ qua phép quay $Q_{(I,\alpha)}$. (với điểm I(–2; 2); $\alpha = 30^0$)

Theo công thức (*) của bài 7 ta có:

$$\begin{cases} x' = (x_0 + 2).\cos30^0 - (y_0 - 2).\sin30^0 - 2 \\ y' = (y_0 - 2).\cos30^0 + (x_0 + 2).\sin30^0 + 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = (x_0 + 2).\dfrac{\sqrt{3}}{2} - (y_0 - 2).\dfrac{1}{2} - 2 \\ y' = (y_0 - 2).\dfrac{\sqrt{3}}{2} + (x_0 + 2).\dfrac{1}{2} + 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x' = \sqrt{3}.x_0 - y_0 + 2.\sqrt{3} - 2 \\ 2y' = x_0 + \sqrt{3}.y_0 - 2.\sqrt{3} + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{2\sqrt{3}.x' + 2y' + 4\sqrt{3} - 12}{4} \\ y_0 = \dfrac{-2x' + 2.\sqrt{3}.y' - 4\sqrt{3} + 4}{4} \end{cases} \quad (1)$$

Mặt khác ta có: M(x_0; y_0) $\in$ d: $2x - y = 0 \Rightarrow 2x_0 - y_0 = 0$ (b)

Thay (1) vào (b) ta được:

$$2.\frac{2\sqrt{3}.x' + 2y' + 4\sqrt{3} - 12}{4} - \frac{-2x' + 2.\sqrt{3}.y' - 4\sqrt{3} + 4}{4} = 0$$

$\Rightarrow (1 + 2.\sqrt{3})x' + (2 - \sqrt{3})y' + 6\sqrt{3} - 14 = 0$ (2)

Giả sử M'(x'; y') thoả mãn: $T_{\vec{v}}(M') = M''(x''; y'')$. Khi đó ta có:

$$\begin{cases} x'' = a + x' \\ y'' = b + y' \end{cases} \text{(với } \vec{v} = (a; b) = (3; 1)\text{)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'' = 3 + x' \\ y'' = 1 + y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x'' - 3 \\ y' = y'' - 1 \end{cases} \text{(d)}$$

Thay (d) vào (2) ta được:

$$(1 + 2.\sqrt{3}).(x'' - 3) + (2 - \sqrt{3}).(y'' - 1) + 6\sqrt{3} - 14 = 0$$

$$\Rightarrow (1 + 2.\sqrt{3}).x'' + (2 - \sqrt{3}).y'' + \sqrt{3} - 19 = 0$$

Ta có M''(x''; y'') là ảnh của M qua qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay $Q_{(I,\alpha)}$ và phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$.

$\Rightarrow M''(x''; y'') \in d'$

Vậy phương trình đường thẳng d' là:

$$(1 + 2.\sqrt{3}).x + (2 - \sqrt{3}).y + \sqrt{3} - 19 = 0$$

Cách 2:

Gọi d_1 là ảnh của d qua phép quay $Q_{(I,\alpha)}$ (với I(–2; 2); $\alpha = 30^0$)

$\Rightarrow$ d'là ảnh của d_1 qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$

Ta có $O(0; 0) \in d$: $2x - y = 0$ nên d_1 đi qua $O'(x'; y') = Q_{(I,\alpha)}(O)$

Theo công thức (*) của bài 7 ta có:

$$\begin{cases} x' = (0+2).\cos30^0 - (0-2).\sin30^0 - 2 \\ y' = (0-2).\cos30^0 + (0+2).\sin30^0 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \sqrt{3} - 1 \\ y' = -\sqrt{3} + 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow O'(\sqrt{3} - 1; -\sqrt{3} + 3)$

Ta có $A(1; 2) \in d$: $2x - y = 0$ nên d_1 đi qua $A'(x'_1; y'_1) = Q_{(I,\alpha)}(A)$

Theo công thức (*) của bài 7 ta có:

$$\begin{cases} x'_1 = (1+2).\cos30^0 - (2-2).\sin30^0 - 2 \\ y'_1 = (2-2).\cos30^0 + (1+2).\sin30^0 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - 2 \\ y' = \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A'(\frac{3\sqrt{3}}{2} - 2; \frac{7}{2})$$

Vậy đường thẳng d_1 đi qua $O'(\sqrt{3}-1; -\sqrt{3}+3)$; $A'(\frac{3\sqrt{3}}{2}-2; \frac{7}{2})$

$\Rightarrow \overrightarrow{O'A'} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-2; 2\sqrt{3}+1)$

Ta có $\vec{u} = (\sqrt{3}-2; 2\sqrt{3}+1)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d_1

Phương trình đường thẳng d_1 là:

$$\frac{x-\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-2} = \frac{y-3+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+1} \Rightarrow (1+2.\sqrt{3})x + (2-\sqrt{3})y + 6\sqrt{3} - 14 = 0$$

$\Rightarrow \vec{u}$; $\vec{v}$ không cùng phương $\Rightarrow d_1 // d'$

$\Rightarrow$ Phương trình d' có dạng:

$(1+2.\sqrt{3})x + (2-\sqrt{3})y + C = 0$ $(C \neq 6\sqrt{3} - 14)$

Ta có ảnh của $O'(\sqrt{3}-1; -\sqrt{3}+3) \in d_1$ qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ là $O''(x'_o; y'_o)$ thuộc d'

Mặt khác ta có: $\begin{cases} x'_o = a + \sqrt{3} - 1 = 2 + \sqrt{3} \\ y'_o = b - \sqrt{3} + 3 = 4 - \sqrt{3} \end{cases}$ (vì $\vec{v} = (a; b) = (3; 1)$)

$\Rightarrow O''(2+\sqrt{3}; 4-\sqrt{3}) \in d'$

$\Rightarrow (1+2.\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3}).(4-\sqrt{3}) + C = 0$

$\Rightarrow -\sqrt{3} + 19 = 0 \Rightarrow C = \sqrt{3} - 19$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình đường thẳng d' là:

$(1+2.\sqrt{3}).x + (2-\sqrt{3}).y + \sqrt{3} - 19 = 0.$

Bài 15: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d: $x + y - 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng d qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự $V_{(I,k)}$ và phép quay $Q_{(J,\alpha)}$. Biết:

1. $I(-1; -1)$; $k = \frac{1}{2}$; $J \equiv O(0; 0)$; $\alpha = -45^0$
2. $I(-2; 1)$; $k = 2$; $J(1; 3)$; $\alpha = 30^0$

Giải

1. $I(-1; -1)$; $k = \frac{1}{2}$; $J \equiv O(0; 0)$; $\alpha = -45^0$

Cách 1:

Xét $M(x_o; y_o)$ bất kì thuộc đường thẳng d: $x + y - 2 = 0$.

$\Rightarrow x_o + y_o - 2 = 0$ (1)

Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy. Gọi M'(x'; y') là ảnh của $M(x_0; y_0)$ qua phép vị tự $V_{(I,k)}$.

Ta có: $\overrightarrow{IM'} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{IM}$ (Với $\overrightarrow{IM'} = (x'+1; y'+1)$; $\overrightarrow{IM} = (x_0 + 1 ; y_0 + 1)$).

$$\Rightarrow \begin{cases} x'+1 = \frac{1}{2}(x_o + 1) \\ y'+1 = \frac{1}{2}(y_o + 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_o = 2x'+1 \\ y_o = 2y'+1 \end{cases} \text{(a)}$$

Thay (a) vào (1) ta được:

$(2x' + 1) + (2y' + 1) - 2 = 0 \Rightarrow x' + y' = 0$ (b)

Xét M''(x''; y'') = $Q_{(J,\alpha)}$(M'). Khi đó theo công thức (*) của bài 7 ta có:

$$\begin{cases} x'' = (x'-0)\cos(-45^0) - (y'-0)\sin(-45^0) + 0 \\ y'' = (y'-0)\cos(-45^0) + (x'-0)\sin(-45^0) + 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = \dfrac{\sqrt{2}.x' + \sqrt{2}.y'}{2} \\ y'' = \dfrac{\sqrt{2}.y' - \sqrt{2}.x'}{2} \end{cases}$$

(vì $J \equiv O(0; 0)$; $\alpha = -45^0$)

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}.x'' - \sqrt{2}.y''}{2} \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}.x'' + \sqrt{2}.y''}{2} \end{cases} \text{(c)}$$

Thay (c) vào (b) ta được: $\dfrac{\sqrt{2}.x'' - \sqrt{2}.y''}{2} + \dfrac{\sqrt{2}.x'' + \sqrt{2}.y''}{2} = 0 \Rightarrow x'' = 0$

Ta có M''(x''; y'') là ảnh của M qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự $V_{(I,k)}$ và phép quay $Q_{(J,\alpha)}$.

$\Rightarrow$ M''(x''; y'') $\in$ d'

Vậy phương trình đường thẳng d' là: x = 0

Cách 2:

Gọi d_1 là ảnh của đường thẳng d qua phép vị tự $V_{(I,k)}$ (với I (– 1; – 1); $k = \frac{1}{2}$).

$\Rightarrow$ Đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng d_1 qua phép quay $Q_{(J,\alpha)}$ (với $J \equiv O(0; 0)$; $\alpha = -45^0$)

Ta có $I(-1; -1) \notin d: x + y - 2 = 0$.

$\Rightarrow d_1 // d$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng d_1 có dạng: $x + y + C = 0$; ($C \neq -2$).

Gọi $A'(x'_A; y'_A)$ là ảnh của $A(0; 2) \in d$ qua phép vị tự $V_{(I,k)}$

$\Rightarrow A'(x'_A; y'_A) \in d_1$.

Ta có: $\overrightarrow{IA'} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{IA}$ (Với $\overrightarrow{IA'} = (x'_A + 1; y'_A + 1); \overrightarrow{IA} = (1 ; 3)$).

$$\Rightarrow \begin{cases} x'_A + 1 = \frac{1}{2} \\ y'_A + 1 = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_A = -\frac{1}{2} \\ y'_A = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow A'(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}) \in d_1$.

$\Rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + C = 0 \Rightarrow C = 0$ (thỏa điều kiện: $C \neq -2$).

Vậy phương trình đường thẳng d_1 là: $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$

Đường thẳng d_1 đi qua O(0; 0), do đó ảnh d' của d_1 qua phép quay tâm O(0; 0) góc -45^0 là trục tung Oy

Kết luận: Phương trình đường thẳng d' là: $x = 0$

2. $I(-2; 1)$; $k = 2$; $J(1; 3)$; $\alpha = 30^0$

Cách 1:

Xét $M(x_o; y_o)$ bất kì thuộc đường thẳng d: $x + y - 2 = 0$.

$\Rightarrow x_o + y_o - 2 = 0$ (1)

Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, gọi $M'(x'; y')$ là ảnh của $M(x_o; y_o)$ qua phép vị tự $V_{(I,k)}$.

Ta có: $\overrightarrow{IM'} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{IM}$ (Với $\overrightarrow{IM'} = (x' + 2; y' - 1)$; $\overrightarrow{IM} = (x_o + 2 ; y_o - 1)$).

$$\Rightarrow \begin{cases} x' + 2 = 2(x_o + 2) \\ y' - 1 = 2(y_o - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_o = \frac{x' - 2}{2} \\ y_o = \frac{y' + 1}{2} \end{cases} \text{(a)}$$

Thay (a) vào (1) ta được:

$$(\frac{x' - 2}{2}) + (\frac{y' + 1}{2}) - 2 = 0 \Rightarrow x' + y' - 5 = 0 \text{ (b)}$$

Xét $M''(x''; y'') = Q_{(J,\alpha)}(M')$(với $J(1; 3)$; $\alpha = 30^0$).

Khi đó theo công thức (*) của bài 7 ta có:

$$\begin{cases} x'' = (x'-1)\cos(30^0) - (y'-3)\sin(30^0) + 1 \\ y'' = (y'-3)\cos(30^0) + (x'-1)\sin(30^0) + 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'' = \dfrac{\sqrt{3}.x' - y' - \sqrt{3} + 5}{2} \\ y'' = \dfrac{\sqrt{3}.y' + x' - 3\sqrt{3} + 5}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{3}.x'' + y'' - \sqrt{3} - 1}{2} \\ y' = \dfrac{x'' - \sqrt{3}.y'' + 3\sqrt{3} - 7}{2} \end{cases} \text{(c)}$$

Thay (c) vào (b) ta được: $\dfrac{\sqrt{3}.x'' + y'' - \sqrt{3} - 1}{2} + \dfrac{x'' - \sqrt{3}.y'' + 3\sqrt{3} - 7}{2} - 5 = 0$

$\Rightarrow (1 + \sqrt{3})x'' + (1 - \sqrt{3})y'' + 2\sqrt{3} - 18 = 0.$

Ta có M''(x''; y'') là ảnh của M qua qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự $V_{(I,k)}$ và phép quay $Q_{(J,\alpha)}$.

$\Rightarrow$ M''(x''; y'') $\in$ d'

Vậy phương trình đường thẳng d' là:

$(1 + \sqrt{3})x + (1 - \sqrt{3})y + 2\sqrt{3} - 18 = 0.$

Cách 2:

Gọi d_1 là ảnh của đường thẳng d qua phép vị tự $V_{(I,k)}$(với I (– 2; 1); k = 2).

$\Rightarrow$ Đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng d_1 qua phép quay $Q_{(J,\alpha)}$ (với J(1; 3); $\alpha = 30^0$)

Ta có I(– 2; 1) $\notin$ d: x + y – 2 = 0.

$\Rightarrow d_1 // d$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng d_1 có dạng: x + y + C = 0; (C $\neq$ – 2).

Gọi A'(x'_A; y'_A) là ảnh của A(0; 2) $\in$ d qua phép vị tự $V_{(I,k)}$

$\Rightarrow$ A'(x'_A; y'_A) $\in d_1$.

Ta có: $\overrightarrow{IA'} = 2\overrightarrow{IA}$ (Với $\overrightarrow{IA'} = (x'_A + 2; y'_A - 1)$; $\overrightarrow{IA} = (2\,;\,1)$).

$$\Rightarrow \begin{cases} x'_A + 2 = 4 \\ y'_A - 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_A = 2 \\ y'_A = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ A'(2; 3) $\in d_1 \Rightarrow 2 + 3 + C = 0 \Rightarrow C = -5$ (thỏa điều kiện: C $\neq$ – 2).

Vậy phương trình đường thẳng d_1 là: $x + y - 5 = 0$

Xét $N(x_1; y_1) \in d_1 \Rightarrow x_1 + y_1 - 5 = 0$ (I)

Gọi $N'(x'_1; y'_1) = Q_{(J,\alpha)}(N)$ (với $J(1; 3)$; $\alpha = 30^0$)

$\Rightarrow N'(x'_1; y'_1) \in d'$.

Theo công thức (*) của bài 7 ta có:

$$\begin{cases} x'_1 = (x_1 - 1)\cos(30^0) - (y_1 - 3)\sin(30^0) + 1 \\ y'_1 = (y_1 - 3)\cos(30^0) + (x_1 - 1)\sin(30^0) + 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'_1 = \dfrac{\sqrt{3}.x_1 - y_1 - \sqrt{3} + 5}{2} \\ y'_1 = \dfrac{\sqrt{3}.y_1 + x_1 - 3\sqrt{3} + 5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{\sqrt{3}.x'_1 + y'_1 - \sqrt{3} - 1}{2} \\ y_1 = \dfrac{x'_1 - \sqrt{3}.y'_1 + 3\sqrt{3} - 7}{2} \end{cases} \text{(II)}$$

Thay (II) vào (I) ta được: $\dfrac{\sqrt{3}.x'_1 + y'_1 - \sqrt{3} - 1}{2} + \dfrac{x'_1 - \sqrt{3}.y'_1 + 3\sqrt{3} - 7}{2} - 5 = 0$

$\Rightarrow (1 + \sqrt{3})x'_1 + (1 - \sqrt{3})y'_1 + 2\sqrt{3} - 18 = 0.$

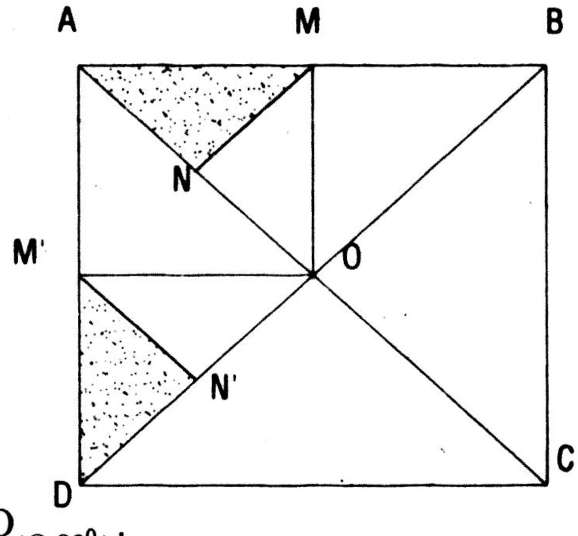
Vậy phương trình đường thẳng d' là:

$(1 + \sqrt{3})x + (1 - \sqrt{3})y + 2\sqrt{3} - 18 = 0.$

Bài 16: Cho hình vuông ABCD tâm O. Gọi M là trung điểm cạnh AB, N là trung điểm đoạn thẳng OA. Tìm ảnh của tam giác AMN qua phép quay $Q_{(O,90^0)}$.

Giải

Không mất tính tổng quát giả sử hình vuông ABCD được biểu diễn như hình vẽ



Ta có: $D = Q_{(O,90^0)}(A)$

$A = Q_{(O,90^0)}(B)$

Gọi M' là ảnh của M qua phép quay $Q_{(O,90^0)}$.

Ta có M là trung điểm cạnh AB do đó M' là trung điểm cạnh DA

Ta có: $O = Q_{(O,90^0)}(O)$

Gọi N' là ảnh của N qua phép quay $Q_{(O,90^0)}$.

Ta có N là trung điểm đoạn thẳng AO do đó N' là trung điểm đoạn thẳng DO.

Vậy ảnh của tam giác AMN qua phép quay $Q_{(O,90^0)}$ là tam giác DM'N'

Bài toán 4: Tìm tập hợp điểm (Tìm quĩ tích điểm) thỏa mãn điều kiện cho trước

Ví dụ

Bài 1: Cho điểm I cố định . Hai điểm M; M' di động sao cho tam giác IMM' vuông cân tại I với (IM, IM') = $\frac{\pi}{2}$.

1. Cho điểm M chạy trên đường tròn tâm O cố định. Tìm tập hợp điểm M'.
2. Cho điểm M chạy trên đường thẳng d cố định. Tìm tập hợp điểm M'.

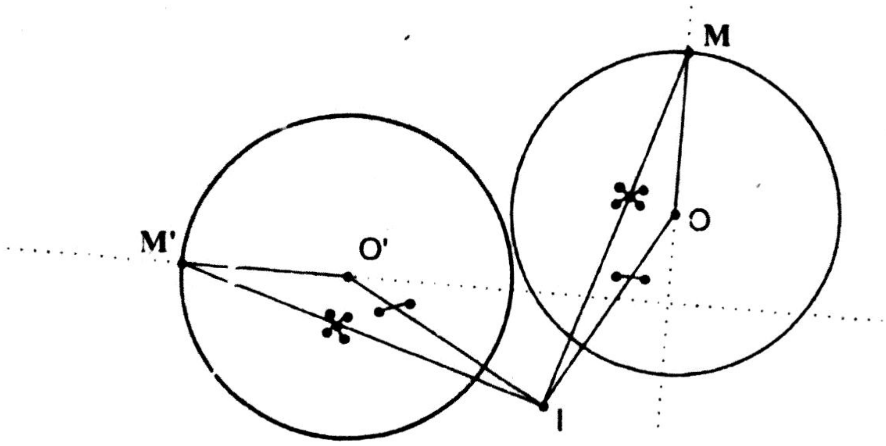
Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên đường thẳng MM'. Tìm tập hợp điểm H.

Giải

Ta có: $\begin{cases} IM = IM' \\ (IM, IM') = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow$ M' là ảnh của M qua phép quay $Q_{(I,\frac{\pi}{2})}$ (1)

1. Điểm M thuộc đường tròn (O)

Gọi O' là ảnh của O qua phép quay $Q_{(I,\frac{\pi}{2})}$



$\Rightarrow \begin{cases} IO = IO' \\ (IO, IO') = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow$ O' cố định

Vậy $Q_{(I,\frac{\pi}{2})}$ (M) = M'; $Q_{(I,\frac{\pi}{2})}$ (O) = O'

$\Rightarrow$ O'M' = OM và O'M' $\perp$ OM

$\Rightarrow$ M' thuộc đường tròn tâm O' là ảnh của đường tròn tâm O qua phép quay $Q_{(I,\frac{\pi}{2})}$

Vậy tập hợp điểm M' là đường tròn tâm O' (với đường tròn tâm O' là ảnh của đường tròn tâm O qua phép quay $Q_{(I,\frac{\pi}{2})}$)

Bài toán 5: Tìm phép dời hình biến hình $\mathcal{H}$ thành hình $\mathcal{H}'$

Ví dụ:

Bài 1: Hãy chỉ ra tất cả các phép dời hình (không kể phép hợp thành của các phép dời hình) biến hình vuông ABCD thành chính nó.

Giải

Gọi f là phép dời hình biến hình vuông ABCD thành chính nó

$\Rightarrow$ f biến tâm O của hình vuông ABCD thành chính nó và f biến điểm A thành một trong các điểm A; B; C; D. Các trường hợp xảy ra như sau:

* *Trường hợp 1*: f biến điểm A thành điểm A. Có hai khả năng:

– Phép dời hình f biến:

B thành B
C thành C
D thành D

Khi đó f là phép đồng nhất

– Phép dời hình f biến:

C thành C
B thành D (hoặc D thành B)

Khi đó f là phép đối xứng trục $Đ_{OA}$.

* *Trường hợp 2*: f biến điểm A thành điểm B

Khi đó f là phép đối xứng trục $Đ_d$ (d là đường trung trực cạnh AB) hoặc f là phép quay tâm O góc quay (OA, OB).

* *Trường hợp 3*: f biến điểm A thành điểm C

Khi đó f là phép đối xứng tâm $Đ_O$ hoặc f là phép đối xứng trục $Đ_{BD}$.

* *Trường hợp 4*: f biến điểm A thành điểm D

Khi đó f là phép đối xứng trục $Đ_{d'}$ (d'là trung trực cạnh AD) hoặc f là phép quay tâm O góc quay (OA, OD) = 3(OA, OB).

Bài 2: Cho tam giác đều ABC với (AB, AC) = (BC, BA) = (CA, CB) = 60^0. Hãy chỉ ra tất cả các phép dời hình (không kể phép hợp thành của các phép dời hình) biến tam giác ABC thành chính nó.

Giải

Gọi f là phép dời hình biến tam giác ABC thành chính nó.

$\Rightarrow$ f biến điểm A thành một trong các điểm A, B, C. Các trường hợp xảy ra như sau:

* *Trường hợp 1*: f biến điểm A thành điểm A. Có hai khả năng:

– Phép dời hình f biến:

B thành B
C thành C

Khi đó f là phép đồng nhất

– Phép dời hình f biến: B thành C (hoặc C thành B)

Khi đó f là phép đối xứng trục $Đ_d$ (đường thẳng d là đường trung trực cạnh BC).

**Trường hợp 2*: f biến điểm A thành điểm B. Có hai khả năng:

– Phép dời hình f biến C thành C.

Khi đó f là phép đối xứng trục $Đ_{d'}$ (d' là đường trung trực cạnh AB).

– Phép dời hình f biến:

B thành C

C thành A

Khi đó f là phép quay tâm O (điểm O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC) góc quay 120^0.

**Trường hợp 3*: f biến điểm A thành điểm C. Có hai khả năng:

– Phép dời hình f biến B thành B.

Khi đó f là phép đối xứng trục $Đ_{d''}$ (d'' là đường trung trực cạnh AC).

– Phép dời hình f biến:

B thành A

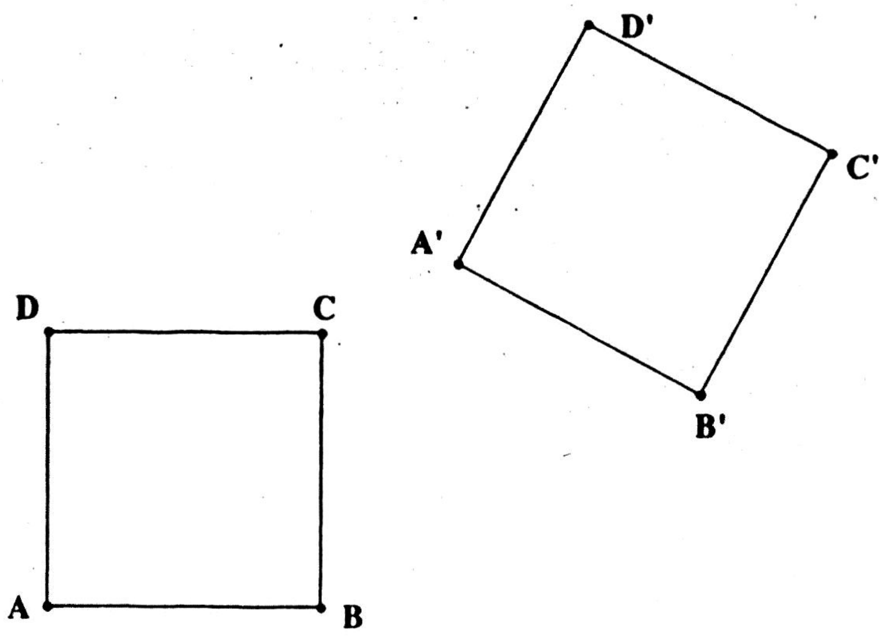
C thành B

Khi đó f là phép quay tâm O (điểm O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC) góc quay -120^0.

Bài 3: Cho hai hình vuông bằng nhau. Chứng minh rằng có một phép dời hình biến hình vuông này thành hình vuông kia.

Giải

Bài toán không mất tính tổng quát giả sử hai hình vuông bằng nhau là ABCD; A'B'C'D' và được biểu diễn như hình vẽ sau:

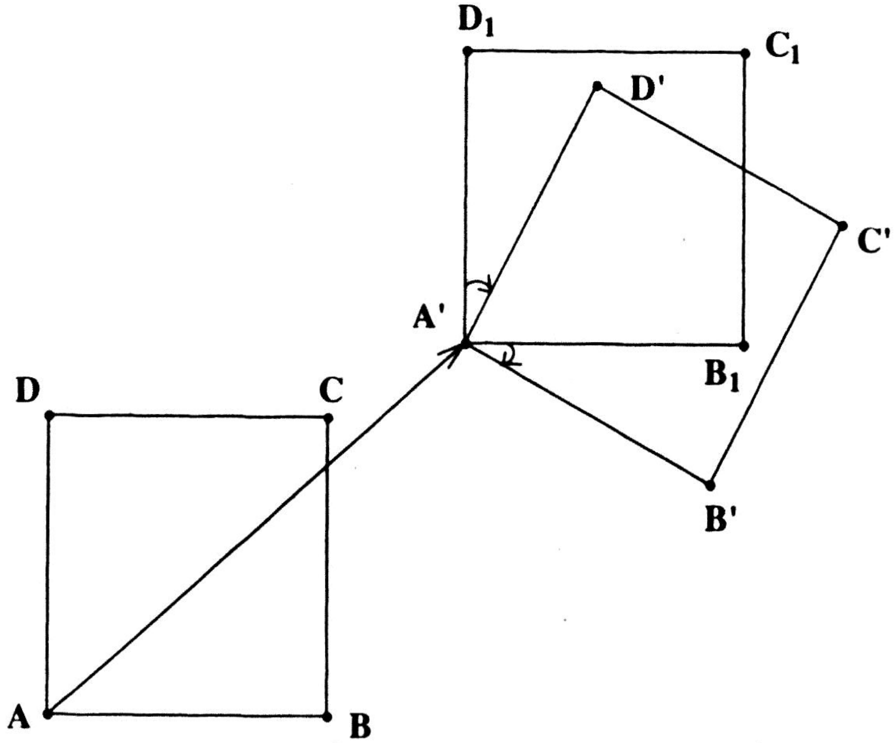


Phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AA'}}$ biến:

+ Điểm A thành điểm A'
+ Hình vuông ABCD thành hình vuông $A'B_1C_1D_1$

Phép quay $Q_{(A',\alpha)}$ (với $\alpha = (A'D_1, A'D')$) biến:

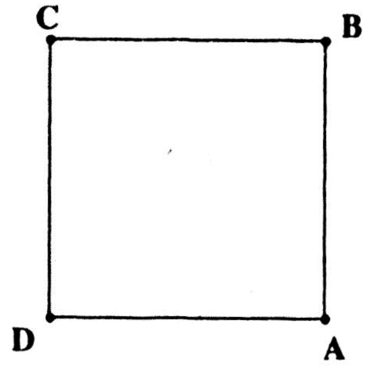
+ Điểm A' thành chính nó
+ Điểm D_1 thành D'
+ Hình vuông $A'B_1C_1D_1$ thành hình vuông A'B'C'D'



Vậy phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép dời hình: Phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AA'}}$ và phép quay $Q_{(A',\alpha)}$ (với $\alpha = (A'D_1, A'D')$) biến hình vuông ABCD thành hình vuông A'B'C'D'.

Bài 4: Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng $\sqrt{2}$ được biểu diễn như hình vẽ sau:

Gọi I là tâm của hình vuông ABCD. Trên cạnh BC lấy một điểm J sao cho BJ = 1. Hãy xác định phép dời hình biến $\overrightarrow{AI}$ thành $\overrightarrow{BJ}$.



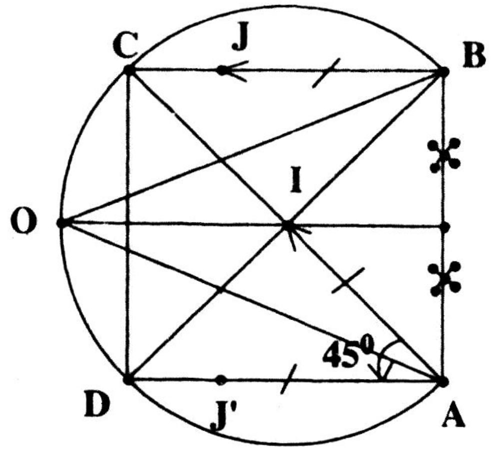
Giải

Ta có $AI = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow AI = BJ$

Mặt khác ta có $(AI, BJ) = 45^0$

Vậy phép quay $Q_{(O,45^0)}$ biến $\overrightarrow{AI}$ thành $\overrightarrow{BJ}$.

Với O là giao điểm của trung trực cạnh AB và cung chứa góc 45^0 đi qua A và B.



Bài 5: Cho hai đường tròn bằng nhau tâm O và O'. Gọi A, A' lần lượt là hai điểm trên hai đường tròn (O), (O'). Gọi M, M' lần lượt là hai điểm di động trên hai đường tròn (O), (O') sao cho (OA, OM) = (O'A', O'M').

1. Hãy xác định phép dời hình biến $\overrightarrow{OM}$ thành $\overrightarrow{O'M'}$.
2. Chứng tỏ rằng đường trung trực đoạn thẳng MM' đi qua một điểm cố định

Giải

1. Ta có (OA, OM) = (O'A', O'M')

$\Rightarrow$ (OA, O'A') = (OM, O'M')

Đặt (OA, O'A') = α (không đổi)

$$\Rightarrow \begin{cases} OM = O'M' \\ (OM, O'M') = \alpha \end{cases}$$

Vậy phép quay $Q_{(I,\alpha)}$ biến $\overrightarrow{OM}$ thành $\overrightarrow{O'M'}$.

Mặt khác ta có (OA, O'A') = α và OA = O'A' nên phép quay $Q_{(I,\alpha)}$ biến A thành A'

$\Rightarrow$ IA = I'A'

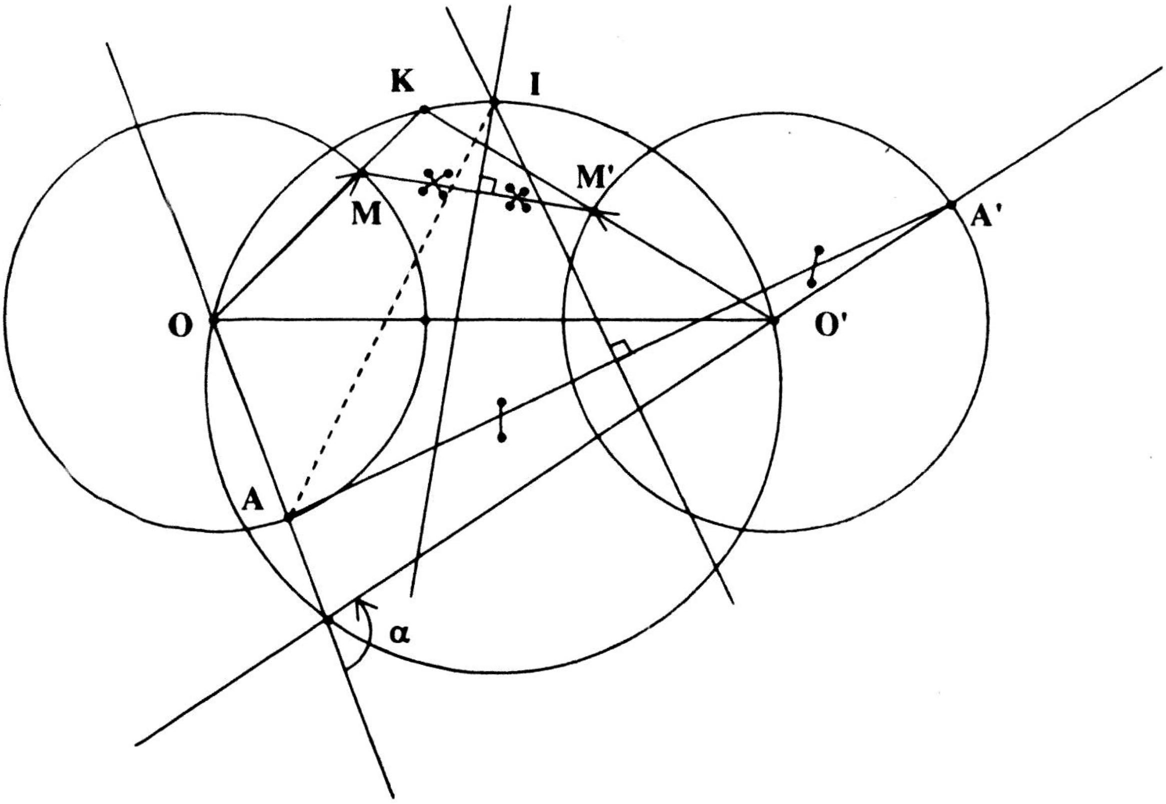
$\Rightarrow$ I thuộc đường trung trực đoạn thẳng AA'

$\Rightarrow$ Tâm quay I là giao điểm của đường trung trực đoạn thẳng AA' và cung chứa góc α đi qua O và O'.

2. Phép quay $Q_{(I,\alpha)}$ biến điểm M thành điểm M' nên IM = IM'

Do đó I thuộc đường trung trực đoạn thẳng MM'

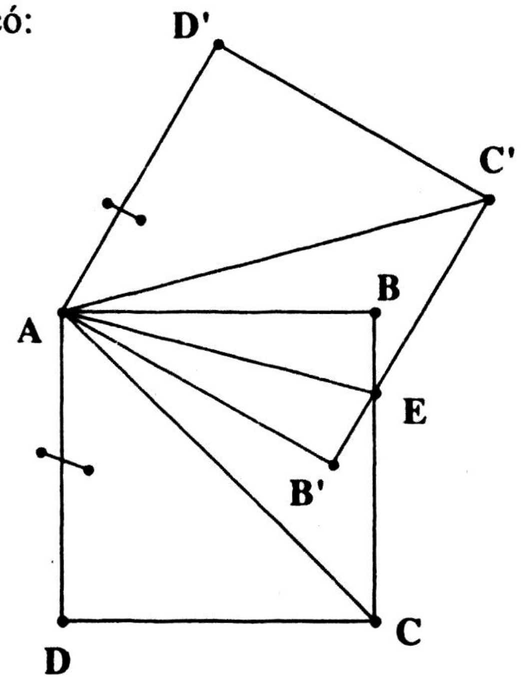
Vậy đường trung trực đoạn thẳng MM' đi qua điểm I cố định (đpcm).



Bài 6: Cho hai hình vuông ABCD và AB'C'D' bằng nhau có cạnh a. Tìm phép đối xứng trục biến hình vuông này thành hình vuông kia.

Giải

Bài toán không mất tính tổng quát giả sử hai hình vuông ABCD và AB'C'D' bằng nhau có cạnh a được biểu diễn như hình vẽ



Gọi E là giao điểm của BC và B'C'. Ta có:

Δ ABE = Δ AB'E

$\Rightarrow$ BE = B'E (1)

Mặt khác ta có: BA = B'A = a

$\Rightarrow$ B và B' đối xứng nhau qua đường thẳng AE

Vậy phép đối xứng trục $Đ_{AE}$ biến điểm B thành B'

Từ (1) suy ra CE = C'E

Mặt khác ta có: CA = C'A = $a\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ C và C' đối xứng nhau qua đường thẳng AE

Vậy phép đối xứng trục $Đ_{AE}$ biến điểm C thành C'

Ta có AD = AD' và $\widehat{DAE} = \widehat{D'AE} = 90^0 - \dfrac{\widehat{BAB'}}{2}$

$\Rightarrow$ D và D' đối xứng nhau qua đường thẳng AE

Vậy phép đối xứng trục $Đ_{AE}$ biến điểm D thành D'

Do đó phép đối xứng trục $Đ_{AE}$ biến hình vuông ABCD thành hình vuông AB'C'D'.

Vấn đề II

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN; QUAN HỆ SONG SONG.

A. CẦN NHỚ

I. ***Xác định mặt phẳng***: Một mặt phẳng được xác định nếu biết một trong các điều kiện sau:

1. mặt phẳng đó đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.
2. mặt phẳng đó đi qua một đường thẳng và một điểm ở ngoài đường thẳng ấy.
3. mặt phẳng đó đi qua hai đường thẳng cắt nhau.
4. mặt phẳng đó đi qua hai đường thẳng song song.
5. mặt phẳng đó đi qua một đường thẳng và song song với một đường thẳng chéo với đường thẳng ấy.
6. mặt phẳng đó đi qua một điểm và song song với một mặt phẳng không chứa điểm ấy.

II. ***Chứng minh đường thẳng nằm trong mặt phẳng***:

Nếu đường thẳng d có hai điểm phân biệt nằm trong mặt phẳng (P) thì mọi điểm của đường thẳng d đều thuộc mặt phẳng (P). Kí hiệu: $d \subset (P)$ hay $(P) \supset d$.

III. ***Quan hệ song song***:

1. Hai đường thẳng được gọi là song song nếu chúng cùng thuộc một mặt phẳng và không có điểm chung.

2. + Đường thẳng d và mặt phẳng (P) được gọi là song song nếu chúng không có điểm chung

+ Đường thẳng d (không nằm trong mặt phẳng (P)) song song mặt phẳng (P) khi và chỉ khi d song song với một đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P).

+ Nếu mặt phẳng (P) đi qua đường thẳng d (mà d song song mặt phẳng (Q)) thì giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) (nếu có) song song với d.

+ Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng song song với một đường thẳng d thì giao tuyến của chúng song song với đường thẳng d

3. + Hai mặt phẳng được gọi là song song nếu chúng không có điểm chung.

+ Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và cùng song song mặt phẳng (Q) thì (P) song song với mặt phẳng (Q).

+ Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song thì mọi mặt phẳng (R) đã cắt (P) thì cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song

4. Định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng:

Nếu ba mặt phẳng cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến đó hoặc đồng quy hoặc song song từng đôi một

5. *a. Định lí Ta-lét:*

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn ra trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ

b. Định lí Ta-lét đảo: Giả sử trên hai đường thẳng chéo nhau a và b lần lượt lấy các điểm A, B, C và A', B', C' sao cho: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.

Khi đó ba đường thẳng AA', BB', CC' lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song, tức là chúng cùng song song với một mặt phẳng.

IV. *Hình đa diện; khối đa diện:*

1. Hình đa diện (gọi tắt đa diện) là hình được tạo bởi một số hữu hạn các miền đa giác thỏa mãn hai tính chất:

- Hai miền đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không giao nhau hoặc có một đỉnh chung hoặc có một cạnh chung.

- Mỗi cạnh của miền đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai miền đa giác. Mỗi miền đa giác như thế gọi là một mặt của hình đa diện. Các đỉnh, cạnh của miền đa giác ấy theo thứ tự được gọi là các đỉnh; cạnh của hình đa diện.

2. Khối đa diện là phần không gian được giới hạn bởi một hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.

Những điểm không thuộc khối đa diện được gọi là *điểm ngoài* của khối đa diện. Những điểm thuộc khối đa diện nhưng không thuộc hình đa diện ứng với khối đa diện ấy được gọi là *điểm trong* của khối đa diện. Tập hợp các *điểm trong* được gọi là *miền trong*, tập hợp các *điểm ngoài* được gọi là miền ngoài của khối đa diện.

Khối đa diện (H) được gọi là lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của (H) luôn thuộc (H). Khi đó hình đa xác định (H) được gọi là hình đa diện lồi.

3. Hình chóp là một hình đa diện lồi có một mặt là một đa giác (gọi là đáy); các mặt còn lại là những tam giác có chung một đỉnh (gọi là các mặt bên; đỉnh chung gọi là đỉnh của hình chóp).

+ Hình chóp có đáy là đa giác đều và có các cạnh bên bằng nhau được gọi là hình chóp đều. Hình chiếu vuông góc của đỉnh hình chóp đều trên mặt phẳng chứa đáy của hình chóp đều trùng với tâm của đáy.

+ Hình chóp có đáy là tam giác được gọi là hình tứ diện (tứ diện)

- Các mặt của tứ diện đều là các tam giác.
- Tứ diện có 6 cạnh bằng nhau được gọi là tứ diện đều
- Tứ diện đều là hình chóp tam giác đều, hình chóp tam giác đều chưa chắc là tứ diện đều.

4. Hình chóp cụt có hai đáy nằm trong hai mặt phẳng song song, các mặt bên đều là hình thang; các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng quy tại một điểm.

5. Hình lăng trụ là một hình đa diện lồi có hai mặt nằm trong hai mặt phẳng song song (gọi là hai đáy) các mặt còn lại là những hình bình hành (gọi là các mặt bên); cạnh chung của hai mặt bên kề nhau gọi là cạnh bên.

Các cạnh bên của hình lăng trụ song song và bằng nhau. Tổng số cạnh của hình lăng trụ bằng 3n (với n là số cạnh của một đa giác đáy)

+ Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành

B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

1. Bài toán 1: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

Loại I: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (P), (Q) (*không có quan hệ song song)*

Phương pháp:

+ Tìm hai điểm chung phân biệt của hai mặt phẳng(P), (Q).

+ Kết luận: Đường thẳng đi qua hai điểm chung đó là giao tuyến của (P), (Q).

Ví dụ:

Bài 1: Cho hình chóp S.ABCD. Biết AD và BC không song song.

1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC); (SBD)
2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD); (SBC)

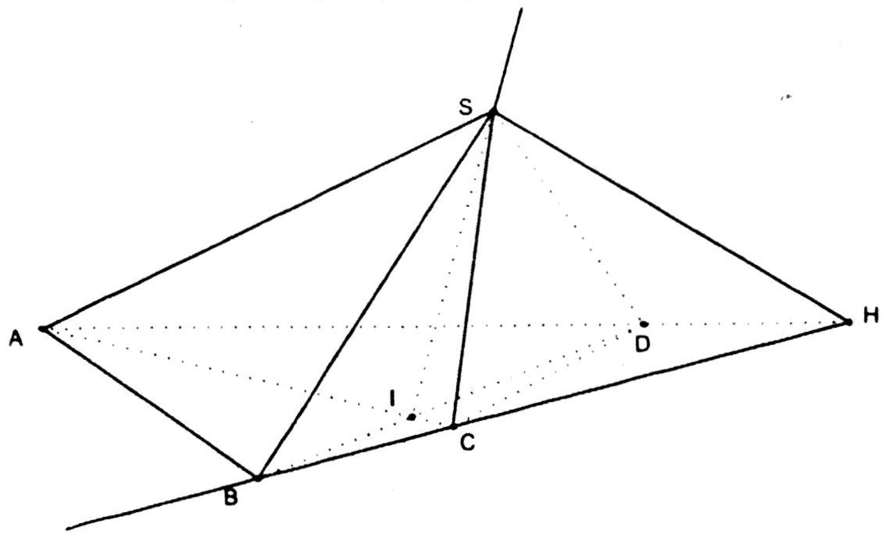
Giải

1. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng đồng phẳng AC; BD.

Khi đó ta có: $SI = (SAC) \cap (SBD)$

2. Gọi H là giao điểm của hai đường thẳng AD; BC đồng phẳng, không song song

Khi đó ta có: $SH = (SAD) \cap (SBC)$



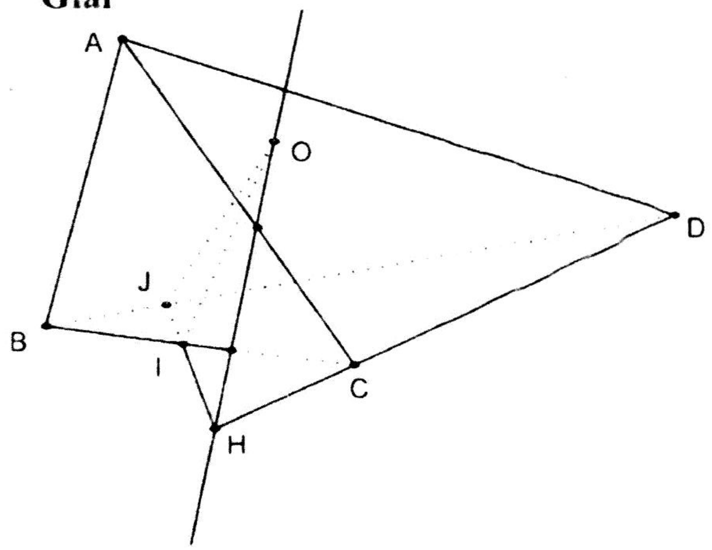
Bài 2: Cho tứ diện ABCD. Gọi O là điểm ở trong ΔACD, I và J lần lượt là hai điểm trên hai cạnh BC, BD sao cho IJ và CD không song song. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (OIJ).

Giải

+ Ta có O là một điểm chu
của hai mặt phẳng (ACD) và (OI

+ Gọi H là giao điểm của
đường thẳng IJ và CD

Vậy: OH = (ACD) $\cap$ (OIJ)



Bài 3: Cho hình chóp S.ABCD. Trong ΔSCD lấy điểm M. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBM).

Giải

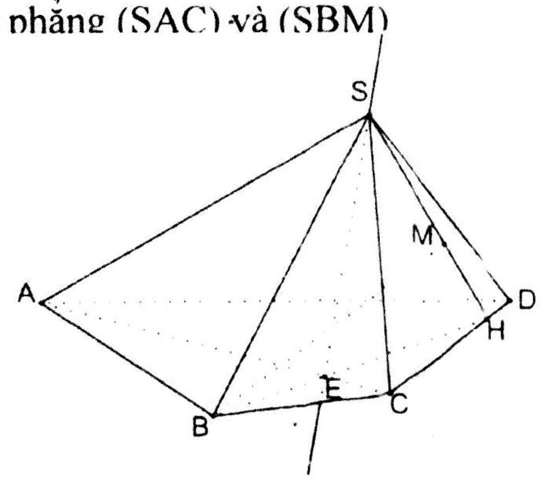
+ Ta có S là một điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBM)

+ Gọi H là giao điểm của hai đường th

Gọi E là giao điểm của hai đường thẳ

$\Rightarrow$ E $\in$ (SBM) và E $\in$ (SAC)

Vậy: SE = (SAC) $\cap$ (SBM)



Bài 4: Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là hai trung điểm của hai cạnh AD; BC.

1. Chứng minh rằng: IB và JA là hai đường thẳng chéo nhau
2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (JAD)
3. Gọi N là điểm trên cạnh AC, M là điểm trên cạnh AB (N; M không trùng đỉnh tứ diện ABCD). Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (DMN).

Giải

1. Giả sử IB và JA là hai đường thẳng không chéo nhau.

Khi đó tồn tại một mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng IB và JA

$\Rightarrow$ I; B; J; A $\in$ (P)

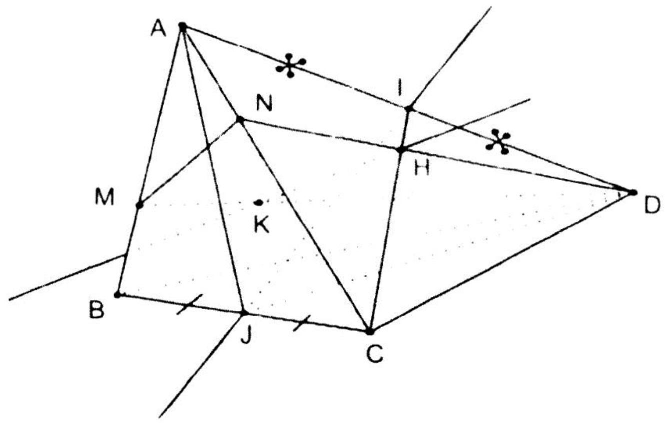
Ta có I; A $\in$ (P) $\Rightarrow$ D $\in$ (P)

Ta có B; J $\in$ (P) $\Rightarrow$ C$\in$ (P)

Vậy: A; B; C; D $\in$ (P)

(Trái với giả thiết: ABCD là một tứ diện)

Do đó IB và JA là hai đường thẳng chéo nhau (đpcm)



2. Ta có I $\in$ AD nên I là một điểm chung của hai mặt phẳng (IBC); (JAD)

Ta có J$\in$ BC nên J là một điểm chung của hai mặt phẳng (IBC); (JAD)

$\Rightarrow$ I J = (IBC)$\cap$(JAD)

3. Gọi H = CI $\cap$DN; K = BI$\cap$ DM.

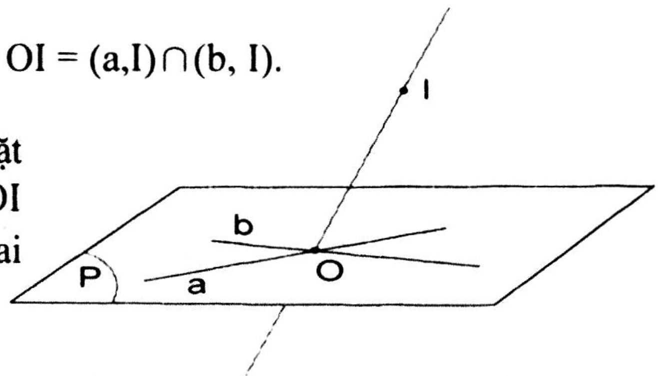
$\Rightarrow$ KH = (IBC)$\cap$ (DMN)

Bài 5: Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng cắt nhau a; b và điểm I$\notin$(P). Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (a, I); (b, I).

Giải

Gọi O = a$\cap$b $\Rightarrow \begin{cases} O \in (a, I) \\ O \in (b, I) \end{cases} \Rightarrow$ OI = (a,I)$\cap$(b, I).

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (a, I); (b, I) là đường thẳng OI (với O là giao điểm của hai đường thẳng cắt nhau a; b)



Loại II: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng cắt nhau (P), (Q). Biết hai mặt phẳng (P), (Q)lần lượt chứa hai đường thẳng a; b song song.

Phương pháp:

+ Tìm một điểm chung S của hai mặt phẳng cắt nhau (P), (Q).

+ Kết luận giao tuyến của hai mặt phẳng cắt nhau (P), (Q) là đường thẳng qua S song song với a và b

Ví dụ:

Bài 1: Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành. Tìm giao tuyến của:

1. Hai mặt phẳng (SAB); (SCD).
2. Hai mặt phẳng (SAD); (SBC).

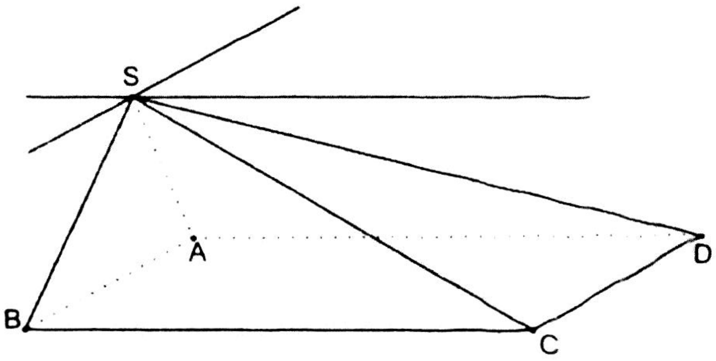
Giải

1. Ta có S là một điểm chung của hai mặt phẳng (SAB); (SCD).

Mặt khác ta có AB // CD nên giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB); (SCD) là đường thẳng đi qua S và song song hai đường thẳng AB; CD.

2. Ta có S là một điểm chung của hai mặt phẳng (SAD; (SBC).

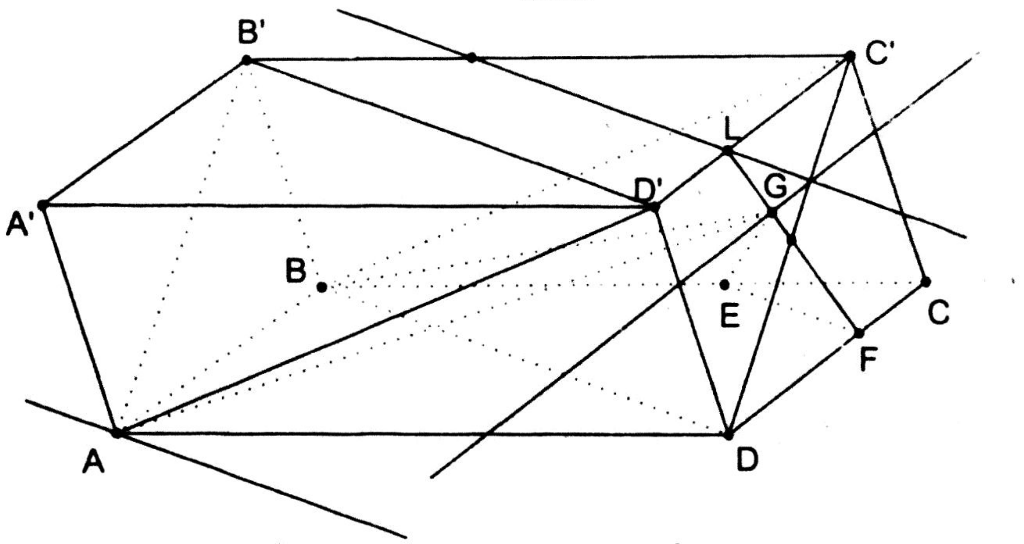
Mặt khác ta có AD // BC nên giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD); (SBC) là đường thẳng đi qua S và song song hai đường thẳng AD; BC.



Bài 2: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'; trên cạnh BC; DC ta lần lượt lấy điểm E; F thỏa FE //BD. Gọi G là điểm bên trong hình bình hành DCC'D'. Tìm giao tuyến của:

1. Hai mặt phẳng (ABCD); (AB'D')
2. Hai mặt phẳng (EGF); (A'B'C'D').
3. Hai mặt phẳng (ABG); (CDD'C').

Giải



1. Ta có A là một điểm chung của hai mặt phẳng (ABCD); (AB'D').

Mặt khác ta có BD//B'D'nên giao tuyến của hai mặt phẳng (ABCD); (AB'D')là đường thẳng đi qua A và song song với BD; B'D'.

2. Gọi L = FG$\cap$C'D'

Mặt khác ta có FE//BD nên giao tuyến của hai mặt phẳng (EGF); (A'B'C'D') là đường thẳng đi qua L và song song với BD; FE.

3. Ta có G là một điểm chung của hai mặt phẳng (ABG); (CDD'C').

Mặt khác ta có AB//CD nên giao tuyến của hai mặt phẳng (ABG); (CDD'C') là đường thẳng đi qua G và song song với AB; CD.

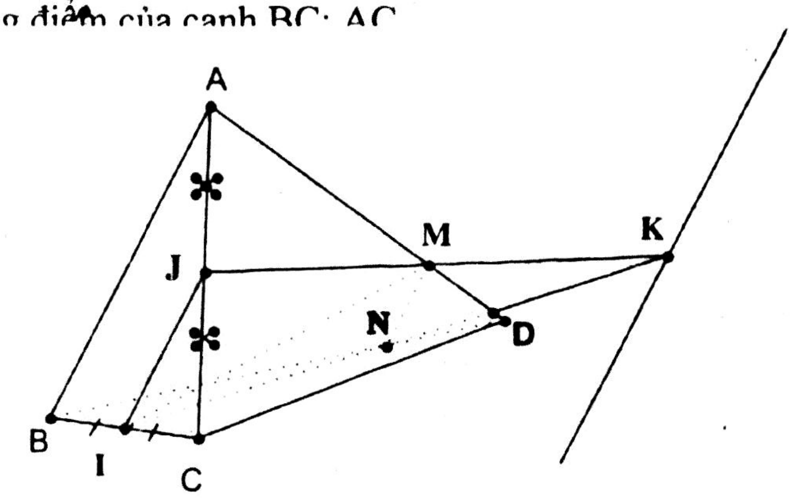
Bài 3: Cho tứ diện ABCD. Gọi I; J lần lượt là trung điểm của cạnh BC; AC. Gọi M là một điểm tùy ý trên cạnh AD.

1. Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (MIJ) và (ABD).
2. Gọi N là giao điểm của BD và d; K là giao điểm của IN và JM. Tìm giao tuyến của (ABK) và (MIJ)

Giải

1. Ta có I; J lần lượt là trung điểm của cạnh BC; AC

⇒ IJ // AB



Mặt khác ta có M thuộc AD nên M là một điểm chung của hai mặt phẳng (MIJ) và (ABD).

⇒ Giao tuyến d của hai mặt phẳng (MIJ) và (ABD) là đường thẳng đi qua M và song song với đường thẳng AB, IJ

2. Ta có K thuộc JM nên K là một điểm chung của hai mặt phẳng (ABK) và (MIJ).

Mặt khác ta có IJ // AB nên giao tuyến của hai mặt phẳng (ABK) và (MIJ) là đường thẳng qua K song song với đường thẳng AB, IJ.

2. Bài toán 2: Tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P)

Phương pháp:

+ Tìm mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và (Q) cắt (P) theo giao tuyến a dễ xác định

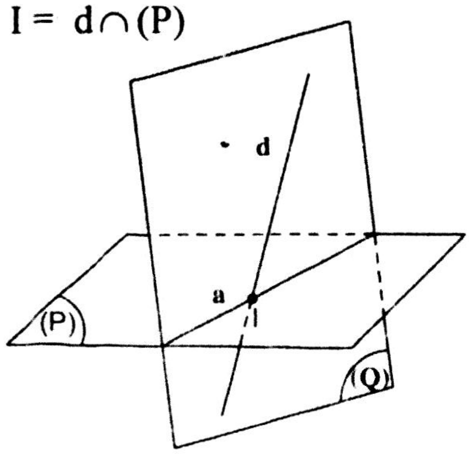
+ Gọi I là giao điểm của d và a

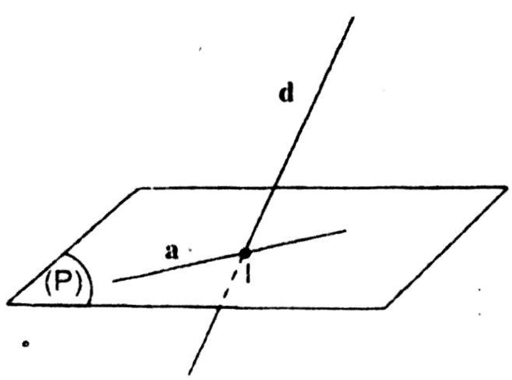
Kết luận: $I = d \cap (P)$.

Đặc biệt:

Trong mặt phẳng (P) chứa đường thẳng a mà a cắt đường thẳng d tại I

⇒ $I = d \cap (P)$



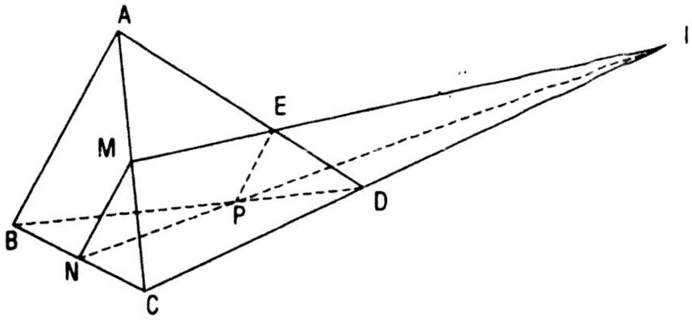


Ví dụ:

Bài 1: Cho bốn điểm A; B; C; D không đồng phẳng. Gọi M; N lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AC; BC. Trên đoạn thẳng BD lấy điểm P thỏa BP = 2PD.

1. Tìm giao điểm của đường thẳng CD với mặt phẳng (MNP).
2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (ABD).

Giải



1. Trong mặt phẳng (BCD) ta có: $\frac{BN}{BC} \neq \frac{BP}{BD}$ nên đường thẳng NP cắt đường thẳng CD tại một điểm I.

Điểm I thuộc CD

và $I \in NP \subset (MNP)$

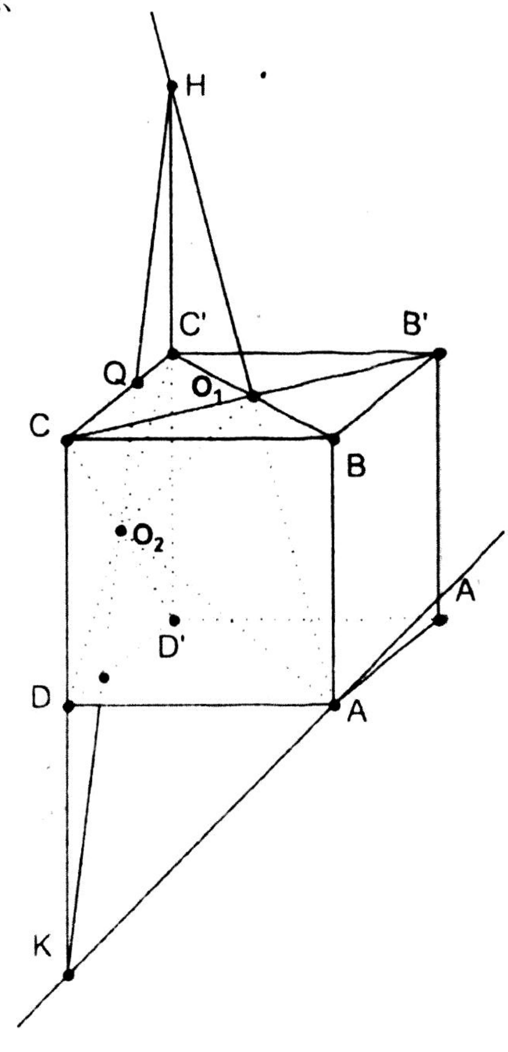
$\Rightarrow I = CD \cap (MNP)$

2. Gọi E là giao điểm của MI và AD

$\Rightarrow E \in (MNP) \Rightarrow PE = (ABD) \cap (MNP)$

Bài 2: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi O_1; O_2 lần lượt là tâm của hình vuông BCC'B'; CDD'C'

1. Tìm giao điểm của đường thẳng CC' với mặt phẳng (AO_1O_2)
2. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (ABCD) và mặt phẳng (AO_1O_2)



Giải

1. Tìm giao điểm của đường thẳng CC' với mặt phẳng (AO_1O_2)

Gọi H là giao điểm của hai đường thẳng AO_1; D'C'

$\Rightarrow$ H là một điểm chung của mặt phẳng (AO_1O_2) và mặt phẳng (CDD'C')

Mặt khác ta có O_2 là điểm chung thứ hai của mặt phẳng (AO_1O_2) và mặt phẳng (CDD'C')

$\Rightarrow HO_2 = (AO_1O_2) \cap (CDD'C')$

Gọi Q là giao điểm của HO_2 và CC'

$\Rightarrow Q \in (AO_1O_2)$ và $Q \in CC'$

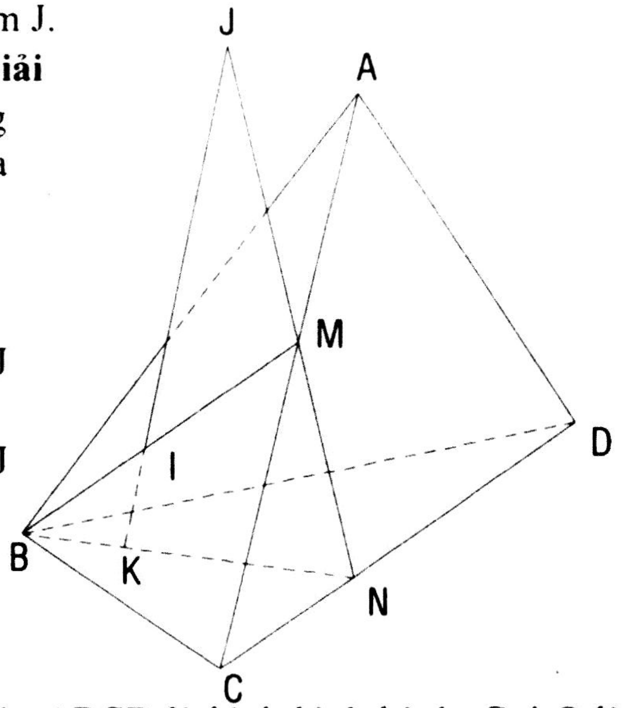
$\Rightarrow Q = CC' \cap (AO_1O_2)$

2. Ta có A là một điểm chung của mặt phẳng (AO_1O_2) và mặt phẳng (ABCD).

Gọi K là giao điểm của đường thẳng CD và HO_2

$\Rightarrow AK = (ABCD) \cap (AO_1O_2)$

Bài 3: Cho bốn điểm A; B; C; D không đồng phẳng. Gọi I; K theo thứ tự là hai điểm trong của tam giác ABC; BCD. Giả sử đường thẳng IK cắt mặt phẳng (ACD) tại J. Xác định giao điểm J.



Giải

Gọi M là giao điểm của đường thẳng BI và CA; N là giao điểm của đường thẳng BK và CD

$\Rightarrow MN = (BIK) \cap (ACD)$

$\Rightarrow J = MN \cap IK$

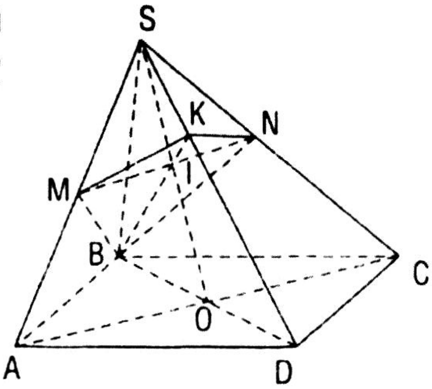
$\Rightarrow$ J thuộc đường thẳng IK và J thuộc đường thẳng MN

$\Rightarrow$ J thuộc đường thẳng IK và J thuộc mặt phẳng (ACD)

$\Rightarrow J = (ACD) \cap IK$

Bài 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi O là tâm của hình bình hành ABCD; M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC. Gọi (P) là mặt phẳng qua M; N; B

1. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và (SAB)
2. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và (SBC)
3. Xác định giao điểm của đường thẳng SO với mặt phẳng (P)
4. Xác định giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (P)
5. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và (SAD
6. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và (SDC
7. Xác định giao điểm E của đường thẳng DA với mặt phẳng (P)
8. Xác định giao điểm F của đường thẳng DC với mặt phẳng (P). Chứng minh E; B; F thẳng hàng ?



Giải

1. Ta có B là một điểm chung của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SAB)

Ta có M thuộc SA nên M là điểm chung thứ hai của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SAB)

$\Rightarrow BM = (P) \cap (SAB)$

2. Ta có BN = (P) ∩ (SBC)

3. Trong mặt phẳng (SAC) đường thẳng SO cắt đường thẳng MN tại I
 ⇒ Điểm I thuộc mặt phẳng (P)(Vì MN ⊂ (P)) ⇒ I = SO ∩ (P)

4. Trong mặt phẳng (SBD) đường thẳng BI cắt SD tại K
 ⇒ K = SD ∩ (P) (1)

5. Ta có (1) ⇒ K thuộc mặt phẳng (P) và K thuộc mặt phẳng (SAD)
 ⇒ K M = (SAD) ∩ (P)

6. Ta có KN = (SCD) ∩ (P)

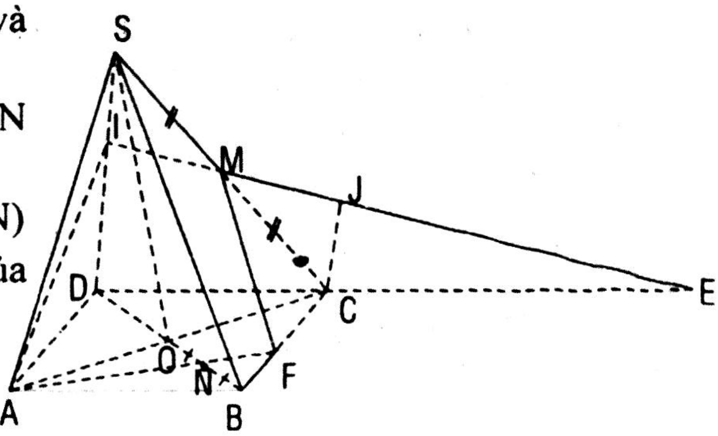
7. Ta có K M = (SAD) ∩ (P).
 Do đó E là giao điểm của KM và DA

8. Ta có KN = (SCD) ∩ (P).
 Do đó F là giao điểm của KN và CD
 Ta có E; F; B thuộc mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABCD)
 ⇒ E; F; B thuộc giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABCD)
 Do đó ba điểm E; F; B thẳng hàng (đpcm)

Chú ý: Chứng minh nhiều điểm trong không gian thẳng hàng ta thường dùng phương pháp: *Chứng minh những điểm đó thuộc hai mặt phẳng phân biệt cắt nhau.*

Bài 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của cạnh SC; N là trung điểm của cạnh BO (O là giao điểm của AC và DB. Tìm giao điểm I của SD và mặt phẳng (AMN) và tính tỉ số $\dfrac{SI}{ID}$.

Giải



* Tìm giao điểm I của SD và mặt phẳng (AMN)

Gọi E là giao điểm của AN và DC

⇒ EM = (SCD) ∩ (AMN)

Khi đó I là giao điểm của EM và SD

* Gọi F là giao điểm của đường thẳng AN và BC

Ta có BF // AD

$$\Rightarrow \frac{BF}{AD} = \frac{NB}{ND} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AD - BF}{AD} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{FC}{AD} = \frac{2}{3} \qquad (1)$$

Mặt khác ta có: $\dfrac{EC}{ED} = \dfrac{FC}{AD}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\frac{EC}{ED} = \frac{2}{3}$

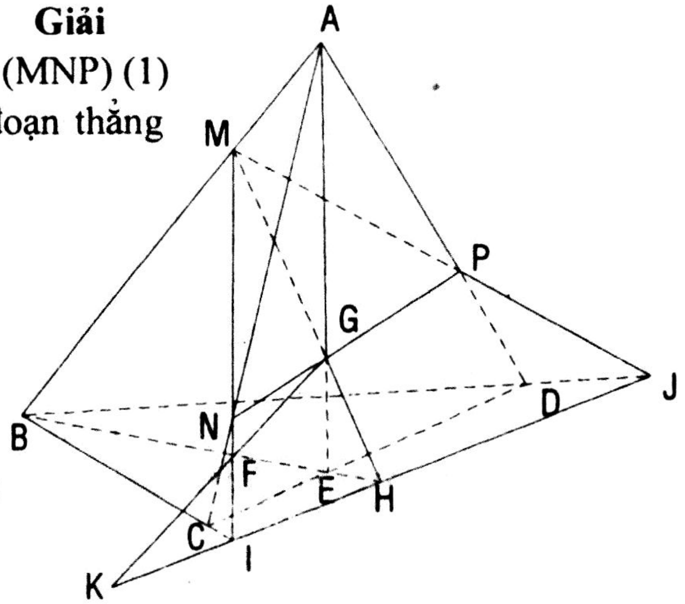
Kẻ đường thẳng qua C song song SD cắt IE tại J. Ta có:

$$\begin{cases} \frac{MS}{MC} = \frac{SI}{CJ} \\ \frac{CJ}{DI} = \frac{CE}{DE} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{SI}{CJ} = 1 \\ \frac{CJ}{DI} = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{SI}{CJ}.\frac{CJ}{DI} = 1.\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{SI}{ID} = \frac{2}{3}$$

Bài 6: Cho bốn điểm A; B; C; D không đồng phẳng. Gọi G là trọng tâm tam giác ACD. Gọi M; N lần lượt thuộc các đoạn thẳng A; CA; AD sao cho $\frac{MA}{MB} = \frac{NC}{NA} = \frac{PD}{PA} = \frac{1}{2}$. Gọi I; J lần lượt là các giao điểm của đường thẳng MN với BC và MP với BD. Gọi E; F lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng CD; NI.

1. Chứng minh rằng các đường thẳng MG; PI; NJ đồng phẳng.
2. Xác định giao điểm của GF với mặt phẳng (BCD).
3. Gọi H là giao điểm MG và BE. Chứng minh bốn điểm: H; I; J và giao điểm của GF với mặt phẳng (BCD) thẳng hàng.

Giải



1. Ta có PI; NJ thuộc mặt phẳng (MNP) (1)

Ta có E là trung điểm của đoạn thẳng CD nên ta có: A;G; E thẳng hàng

Mặt khác ta có $\frac{EG}{AG} = \frac{1}{2}$.

Do đó ta có:

$$\frac{NC}{NA} = \frac{PD}{PA} = \frac{EG}{AG} = \frac{1}{2}.$$

Trong mặt phẳng (ACD) ta có:

$$\frac{NC}{NA} = \frac{PD}{PA} = \frac{EG}{AG}$$

nên các điểm N; G; P nằm trên đường thẳng song song CD

$\Rightarrow G \in NP$

$\Rightarrow$ Đường thẳng MG thuộc mặt phẳng (MNP) (2)

Từ (1) và (2) ta có các đường thẳng MG; PI; NJ đồng phẳng (đpcm)

2. Mặt phẳng (MNP) chứa đường thẳng GF.

Mặt khác ta có $IJ = (MNP) \cap (BCD)$

Gọi K là giao điểm của đường thẳng GF và đường thẳng I J

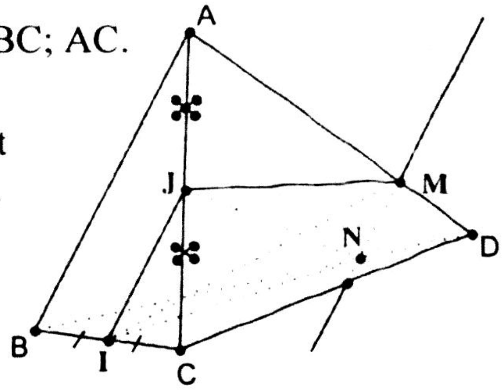
$\Rightarrow K = GF \cap (BCD)$

3. Ta có H = MG $\cap$ BE nên H thuộc giao tuyến IJ của hai mặt phẳng (MNP); (BCD)

Vậy H; K thuộc đường thẳng I J nên bốn điểm: H; I; J và giao điểm K của GF với mặt phẳng (BCD) thẳng hàng (đpcm)

Bài 7: Cho tứ diện ABCD. Gọi I; J lần lượt là trung điểm của cạnh BC; AC. Gọi N là một điểm tùy ý trên cạnh BD (N không là trung điểm đoạn thẳng BD). Tìm giao điểm của đường thẳng AD và mặt phẳng (NIJ)

Giải



Ta có I; J lần lượt là trung điểm của cạnh BC; AC.

$\Rightarrow$ IJ // AB

Mặt khác ta có N thuộc BD nên N là một điểm chung của hai mặt phẳng (MIJ) và (ABD).

$\Rightarrow$ Giao tuyến d của hai mặt phẳng (NIJ) và (ABD) là đường thẳng đi qua N và song song với đường thẳng AB, IJ

Vậy d = (NIJ) $\cap$ (ABD)

Gọi M là giao điểm của đường thẳng d và đường thẳng AD

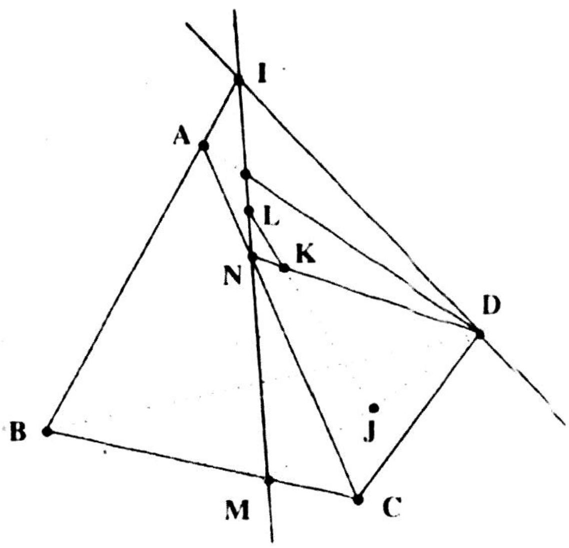
$\Rightarrow$ M $\in$ AD và M $\in$ d $\subset$ (NIJ).

$\Rightarrow$ M = (NIJ) $\cap$ AD.

Bài 8: Cho tứ diện ABCD. Gọi J; K lần lượt là các điểm thuộc miền trong tam giác BCD và ACD.

1. Xác định giao điểm của JK và mặt phẳng (ABC).
2. Xác định giao điểm của AB và mặt phẳng (DJK)
3. Tìm các giao tuyến của mặt phẳng (DJK) và các mặt phẳng chứa các mặt của hình chóp.

Giải



1. Gọi N = DK $\cap$ AC; M = DJ $\cap$ BC

$\Rightarrow$ MN = (ABC) $\cap$ (DJK)

$\Rightarrow$ MN $\subset$ (ABC); MN $\subset$ (DJK)

Gọi L là giao điểm của MN và JK

$\Rightarrow$ L $\in$ JK; L $\in$ MN $\subset$ (ABC)

$\Rightarrow$ L = (ABC) $\cap$ JK.

2. Ta có MN = (ABC) $\cap$ (DJK)

$\Rightarrow$ MN $\subset$ (ABC); MN $\subset$ (DJK)

Gọi I là giao điểm của MN và AB

$\Rightarrow$ I $\in$ AB; I $\in$ MN $\subset$ (DJK)

$\Rightarrow$ I = AB $\cap$ (DJK)

3. Ta có M; N; I thuộc mặt phẳng (DJK)

Vậy ta có:

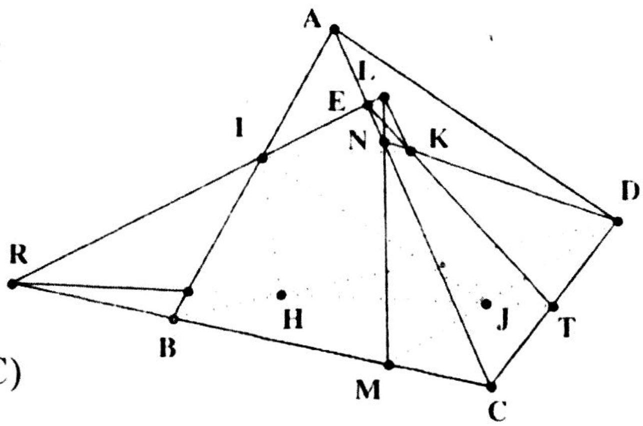
DN = (ACD) ∩ (DJK); DM = (BCD) ∩ (DJK);

NM = (ABC) ∩ (DJK); DI = (ABD) ∩ (DJK)

Bài 9: Cho tứ diện ABCD. Gọi J; K lần lượt là các điểm thuộc miền trong tam giác BCD và ACD. Trên cạnh AB lấy một điểm I (giả sử bài toán không có sự song song).

1. Xác định giao điểm của JK và mặt phẳng (ABC).
2. Xác định giao điểm của BC và mặt phẳng (IJK)
3. Tìm các giao tuyến của mặt phẳng (IJK) và các mặt phẳng chứa các mặt của hình chóp.

Giải:



1. Gọi N = DK ∩ AC; M = DJ ∩ BC

⇒ MN = (ABC) ∩ (DJK)

⇒ MN ⊂ (ABC); MN ⊂ (DJK)

Gọi L là giao điểm của MN và JK

⇒ L ∈ JK; L ∈ MN ⊂ (ABC)

⇒ L = (ABC) ∩ JK.

2. Ta có I; L thuộc mặt phẳng (ABC) và điểm L thuộc mặt phẳng (IJK).

Đường thẳng IL và BC đồng phẳng; bài toán không có sự song song nên đường thẳng IL và BC cắt nhau tại điểm R

⇒ R ∈ IL ⊂ (DJK); R ∈ BC ⊂ (ABC)

⇒ R = BC ∩ (IJK)

3. Ta có:

RJ = (BCD) ∩ (IJK); IL = (ABC) ∩ (IJK)

Gọi T là giao điểm của RJ và CD

⇒ TK = (ACD) ∩ (IJK)

Gọi H là giao điểm của BD và RJ

⇒ IH = (ABD) ∩ (IJK)

Chú ý: Tìm phần chung của các mặt của tứ diện ABCD và mặt phẳng (IJK).

Gọi E là giao điểm của IL và AC. Phần chung của mặt phẳng (IJK) và các mặt của tứ diện ABCD (ΔABC; ΔABD; ΔBCD; ΔACD lần lượt là đoạn thẳng IE; IH; HT; ET).

3. Bài toán 3: Xác định thiết diện

* Cho mặt phẳng (P)và một hình đa diện, nếu mặt phẳng (P) và hình đa diện có điểm chung M thì mặt phẳng (P) cắt mặt của hình đa diện có chứa điểm M theo một đoạn thẳng hoặc một điểm duy nhất M. Đoạn thẳng chung đó được gọi là đoạn giao tuyến.

Các đoạn giao tuyến khép kín, giới hạn một đa giác phẳng gọi là thiết diện của mặt phẳng (P) và hình đa diện.

Như vậy việc xác định thiết diện của mặt phẳng (P) và hình đa diện chủ yếu là việc xác định một cách tuần tự các đoạn giao tuyến của mặt phẳng (P) và các mặt của hình đa diện (nếu có).

Loại I: Mặt phẳng (P) được xác định bởi ba điểm không thẳng hàng cho trước

Loại II: Mặt phẳng (P) đi qua một điểm M của hình đa diện và (P) song song hai đường thẳng chéo nhau a;b

Phương pháp:

- Tìm một mặt của hình đa diện chứa M và a (hoặc b). Giao tuyến của (P) và mặt phẳng chứa mặt này của hình đa diện qua M và song song với a (hoặc b). Suy ra đoạn giao tuyến. Đoạn giao tuyến này xác định điểm chung mới của mặt phẳng (P) và hình đa diện

- Tiếp tục quy trình trên đến khi được các đoạn giao tuyến khép kín ta có thiết diện.

Loại III: Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng a và song song đường thẳng b

Phương pháp: Thực hiện như loại II

Loại IV: Mặt phẳng (P) đi qua một điểm M và song song mặt phẳng (Q)

Phương pháp:

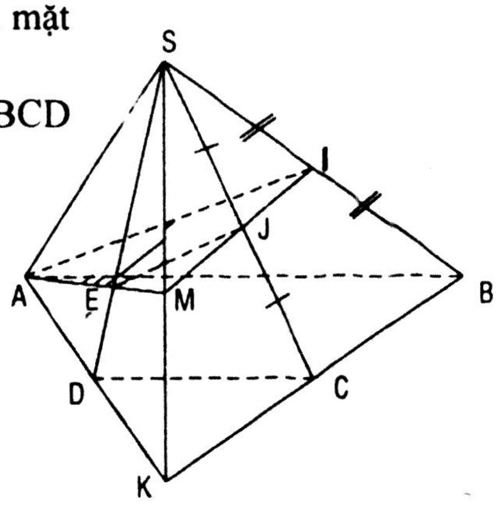
- Tìm mặt hình đa diện chứa M; mặt này nằm trong mặt phẳng (R) cắt cả (P); (Q). Hai giao tuyến thu được song song nhau; chú ý giao tuyến của (R) và (P) đi qua M. Suy ra đoạn giao tuyến của (P) và mặt hình đa diện chứa M

- Tiếp tục quy trình trên đến khi được các đoạn giao tuyến khép kín ta có thiết diện.

Ví dụ:

Bài 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy hình thang (AB // CD; AB > CD). Gọi I; J lần lượt là trung điểm của các cạnh SB; SC

1. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC)
2. Tìm giao điểm của đường thẳng SD và mặt phẳng (AIJ)
3. Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mặt phẳng (AIJ)



Giải

1. Gọi K là giao điểm của AD và BC

$\Rightarrow KS = (SAD) \cap (SBC)$

2. Gọi M là giao điểm của IJ và SK

$\Rightarrow M \in (SAD)$

$\Rightarrow AM = (SAD) \cap (AIJ)$

Gọi E là giao điểm của SD và AM

$\Rightarrow$ E = SD$\cap$(AI J)

3. Thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mặt phẳng (AIJ) là tứ giác AIJE

Bài 2: Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Gọi I là trung điểm của cạnh A; J là điểm đối xứng với D qua C; K là điểm đối xứng với D qua B.

1. Xác định thiết diện của hình tứ diện khi cắt bởi mặt phẳng (IJK)
2. Tính diện tích thiết diện ở câu 1 theo a

Giải

1. Gọi N là giao điểm của I J và AC; M là giao điểm của IK và AB

Ta có thiết diện của hình tứ diện khi cắt bởi mặt phẳng (IJK) là tam giác IMN

2. Tính diện tích của tam giác IMN

Ta có M là trọng tâm của tam giác ADK và N là trọng tâm của tam giác ADJ.

$\Rightarrow AN = \frac{2}{3}AC = \frac{2}{3}.a;\ AM = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3}.a$

$\Rightarrow AN = AM \Rightarrow MN\ //\ BC$

$\Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow MN = \frac{2}{3}BC = \frac{2}{3}.a$

Xét tam giác AIM ta có:

$IM^2 = AI^2 + AM^2 - 2AI.AM.\cos 60^0$

$= \frac{a^2}{4} + \frac{4a^2}{9} - \frac{a}{2}.\frac{2}{3}.a = \frac{13}{36}a^2$

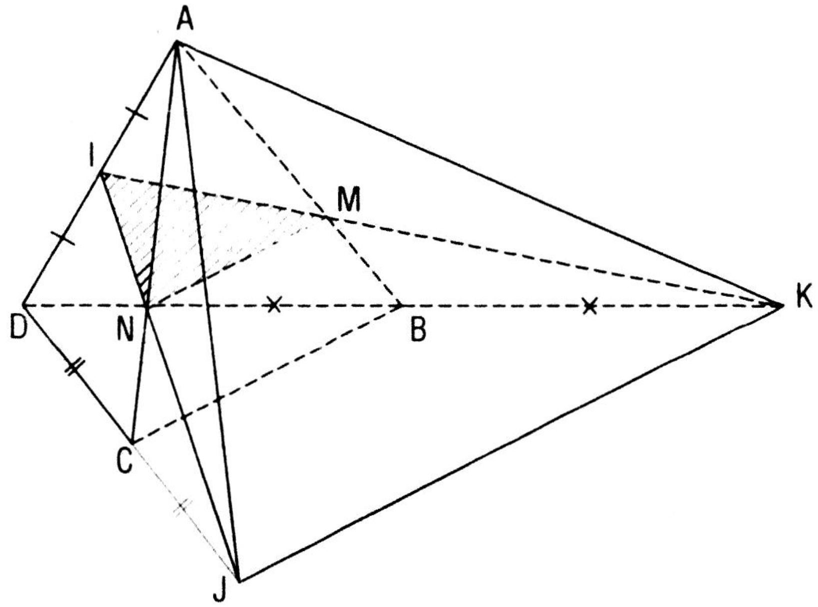
$\Rightarrow IM = \frac{\sqrt{13}}{6}a$

Mặt khác ta có $\Delta IAN = \Delta IAM$ (c.g.c) nên ta cũng có $IN = \frac{\sqrt{13}}{6}a$

$P = \frac{IM + MN + NI}{2} = (\frac{\sqrt{13}}{6} + \frac{1}{3})a = \frac{\sqrt{13}+2}{6}a$

Theo công thức Hê –rông ta có diện tích của ΔIMN là:

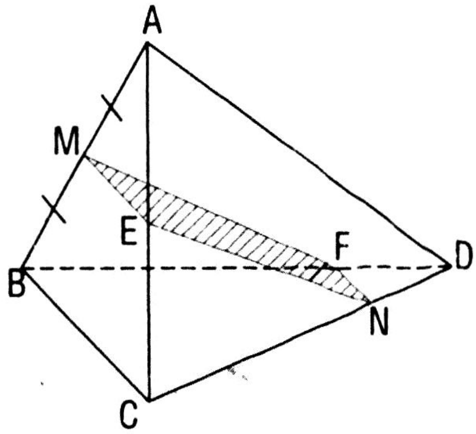
$S = \sqrt{P.(P-MN)(P-IN)^2} = \frac{a^2}{6}$



Bài 3: Cho tứ diện ABCD. Gọi M là trung điểm của cạnh AB; N là một điểm thuộc cạnh CD không trùng với C; D. Mặt phẳng (P) qua MN và song song với đường thẳng BC.

1. Xác định thiết diện của hình tứ diện khi cắt bởi mặt phẳng (P).
2. Xác định vị trí của N trên cạnh CD sao cho thiết diện là một hình bình hành.
3. Xác định vị trí của N trên cạnh CD sao cho thiết diện là một hình thoi.

Giải



1. Mặt phẳng (ABC) chứa BC và BC //(P)

$\Rightarrow (ABC) \cap (P) = Mt$ // BC

Gọi E là giao tuyến của Mt và CA

Vậy E là trung điểm cạnh CA

Mặt phẳng (DBC) chứa BC và BC //(P)

$\Rightarrow (DBC) \cap (P) = Nx$ // BC

Gọi F là giao điểm của Nx và BD

$\Rightarrow$ ME // NF

Thiết diện cần tìm là hình thang MENF.

2. Thiết diện trên là một hình bình hành khi có thêm điều kiện NF = ME

Mặt khác ta có $ME = \frac{1}{2}BC$

Do đó ta cần có thêm điều kiện $NF = \frac{1}{2}BC$.

Mà NF // BC $\Rightarrow$ N là trung điểm cạnh CD

Vậy: Thiết diện trên là một hình bình hành khi có thêm điều kiện N là trung điểm cạnh CD .

3. Thiết diện MENF là một hình thoi khi có thêm điều kiện NF = ME

Mặt khác ta có $ME = \frac{1}{2}BC$

Do đó từ điều kiện $NF = ME \Rightarrow NF = \frac{1}{2}BC$.

Mà NF // BC $\Rightarrow$ N là trung điểm cạnh CD và F là trung điểm cạnh AD

Khi đó $MF = \frac{1}{2}AD$

Do điều kiện ME = MF nên suy ra $\frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD \Rightarrow BC = AD$

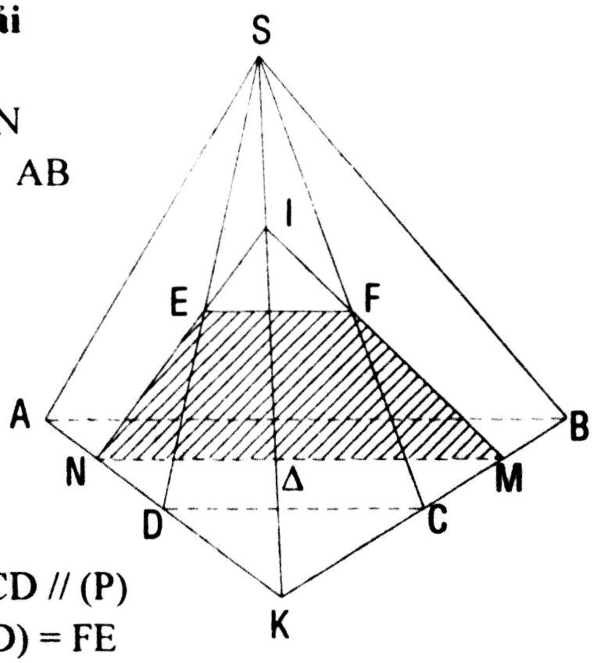
Vậy: Thiết diện MENF là một hình thoi ta cần có N là trung điểm cạnh CD và CB = DA.

Bài 4: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình thang(AB// CD). M là một điểm thuộc cạnh BC không trùng B; C.

1. Xác định thiết diện của hình chóp và mặt phẳng (P) qua M; (P) // (SAB). Gọi E; F; N lần lượt là các giao điểm của (P) với SD; CS; AD. Thiết diện là hình gì ?

2. Chứng minh giao điểm I của FM và NE chạy trên một đường thẳng cố định.

Giải



1. Ta có (P) // (SAB)

Mặt khác ta có: $(P) \cap (ABCD) = MN$

$(SAB) \cap (ABCD) = AB$

$\Rightarrow$ M N // AB

Ta có $(P) \cap (SBC) = MF$

$(SAB) \cap (SBC) = SB$

$\Rightarrow$ FM // SB

Ta có $(P) \cap (SAD) = NE$

$(SAB) \cap (SAD) = SA$

$\Rightarrow$ NE // SA

Ta có M N // AB $\Rightarrow$ M N // CD $\Rightarrow$ CD // (P)

Ta có (SCD) chứa CD và $(P) \cap (SCD) = FE$

$\Rightarrow$ FE // CD $\Rightarrow$ FE // MN

Vậy thiết diện của hình chóp và mặt phẳng (P) là hình thang MNEF

2. Gọi K là giao điểm của AD và BC ta có $SK = (SAD) \cap (SBC)$

Ta có $NE \subset (SAD)$; $MF \subset (SBC)$ và $I = NE \cap MF$

$\Rightarrow$ I thuộc SK cố định.

Bài 5: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình thang(AB // CD); BC = 2a; AD = a; AB= b; ΔSAD đều; M là điểm trên cạnh AB sao cho AM = x (0 < x < a). Mặt phẳng (P) qua M và song song SA; BC cắt CD; SC; SB lần lượt tại P; Q; N.

1. Thiết diện của hình chóp và (P) là hình gì ?
2. Tính diện tích của thiết diện câu 1 theo a; b; x

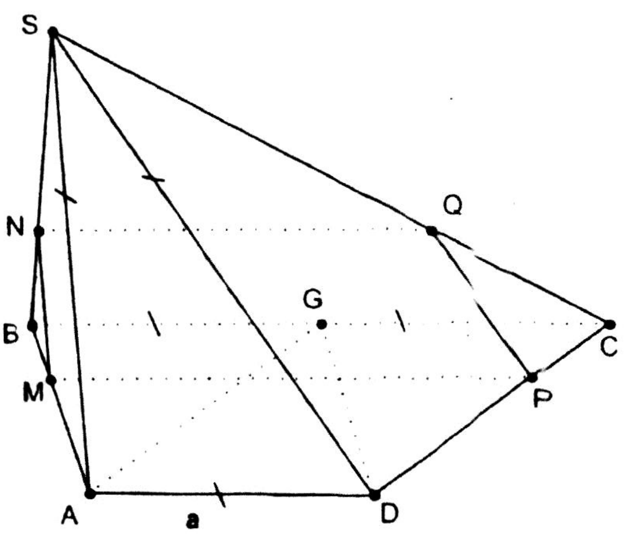
Xác định vị trí M trên cạnh AB sao cho diện tích của thiết diện trên đạt giá trị lớn nhất ?

Giải

1. Ta có (P) // BC và $(P)\cap(ABCD) = MP$, $(P)\cap(SBC) = NQ$

$\Rightarrow$ PM // BC; NQ // BC

$\Rightarrow$ PM // NQ



Ta có (P) // SA

và $(P)\cap(SAB) = MN$

$\Rightarrow$ MN // SA

Thiết diện của hình chóp và (P) là hình thang NMPQ (PM // NQ)

Ta có MN // SA

$$\Rightarrow \frac{BM}{BA} = \frac{MN}{SA} = \frac{BN}{BS} \qquad (1)$$

Ta có PM song song BC và AD

$$\Rightarrow \frac{BM}{BA} = \frac{PC}{PD} \qquad (2)$$

Ta có NQ // BC

$$\Rightarrow \frac{BN}{BS} = \frac{CQ}{CS} \qquad (3)$$

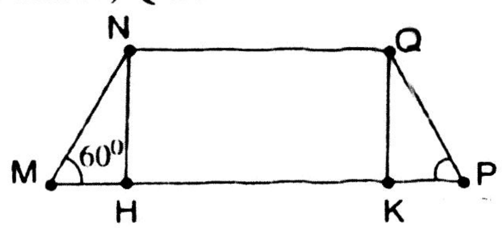
Từ (1); (2); (3) ta có: $\dfrac{PC}{PD} = \dfrac{CQ}{CS} \Rightarrow PQ \;//\; SD \Rightarrow \widehat{NMP} = \widehat{MPQ}$

Thiết diện của hình chóp và (P) là hình thang cân NMPQ (PM // NQ; MN = PQ)

2. Ta có $\widehat{NMP} = \widehat{SAD} = 60^0$; $\widehat{MPQ} = \widehat{SDC} = 60^0$

Gọi H; K lần lượt là hình chiếu vuông góc của N; Q trên MP

$\Rightarrow KP = MH = MN \cos 60^0$



Từ (1) ta có: $MN = AS.\dfrac{BM}{BA} = a.\dfrac{b-x}{b}$

Ta có $MH = MN.\cos 60^0 = a.\dfrac{b-x}{b}.\dfrac{1}{2}$

Mặt khác ta có $\dfrac{NQ}{BC} = \dfrac{SN}{SB} = \dfrac{AM}{AB} \Rightarrow NQ = BC\dfrac{AM}{AB} = 2a.\dfrac{x}{b}$

$\Rightarrow PM = NQ + 2MH = 2a.\dfrac{x}{b} + a.\dfrac{b-x}{b} = a + \dfrac{ax}{b}$

Ta có $NH = MN\sin 60^0 = a.\dfrac{b-x}{b}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy diện tích thiết diện câu 1 là:

$$S = \frac{1}{2}(PM + NQ)NH$$

$$= \frac{1}{2}\left(a + \frac{ax}{b} + 2a.\frac{x}{b}\right)a.\frac{b-x}{b}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4b^2}(b+3x)(b-x)$$

Hay $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{12b^2}(b+3x)(3b-3x) \le \dfrac{a^2\sqrt{3}}{12b^2}\left(\dfrac{b+3x+3b-3x}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$ (*)

Bất đẳng thức (*) xảy ra dấu "=" $\Leftrightarrow (b+3x) = (3b-3x)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{b}{3} \Leftrightarrow AM = \frac{1}{2}MB$$

Do đó diện tích thiết diện trên đạt giá trị lớn nhất là:

$S_{Max} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$ M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $-\dfrac{1}{2}$ ($\overrightarrow{MA} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{MB}$)

Bài 6: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi O_1 là tâm của hình bình hành $A_1B_1C_1D_1$. K là trung điểm cạnh CD; E là trung điểm đoạn thẳng BO_1.

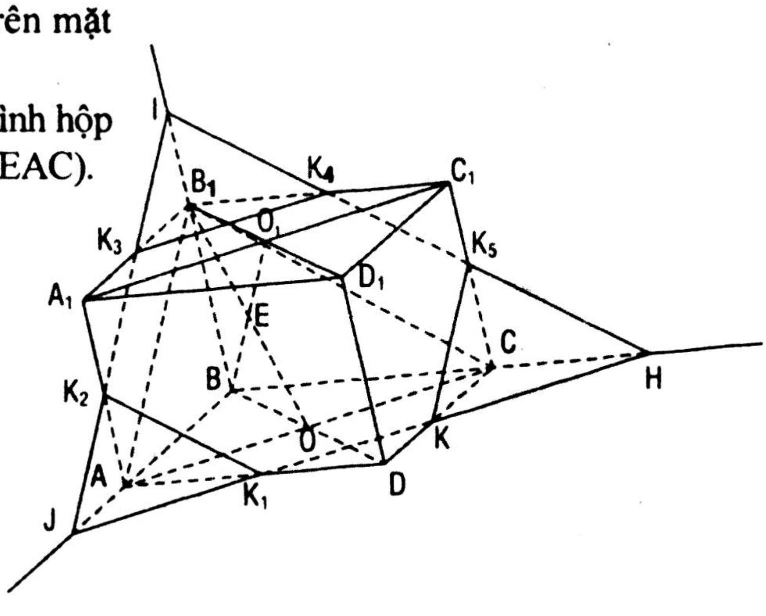
1. Chứng minh rằng E ở trên mặt phẳng (ACB_1).

2. Xác định thiết diện của hình hộp và mặt phẳng (P) qua K; (P) // (EAC).

Giải

1. Gọi O là tâm hình hình bình hành ABCD

$\Rightarrow$ Tứ giác B_1O_1OB là hình bình hành nên trung điểm E của đường chéo BO_1 nên cũng là trung điểm của đường chéo OB_1.



Mà $OB_1 \subset (ACB_1)$

$\Rightarrow$ E ở trên mặt phẳng (ACB_1) (đpcm).

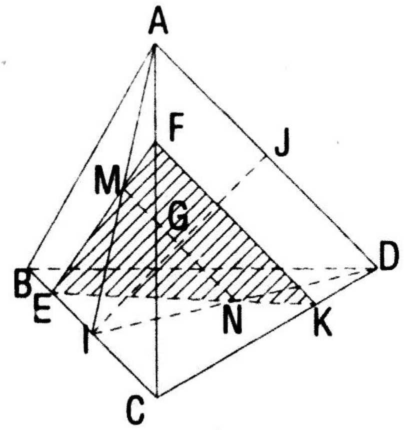
2. Trong mặt phẳng (ABCD) dựng đường thẳng qua K song song AC cắt BC; AB; AD lần lượt là H; J; K_1

Trong mặt phẳng (ABB_1A_1) dựng đường thẳng qua J song song AB_1 cắt AA_1; A_1B_1; BB_1 lần lượt tại K_2; K_3; I. Đường thẳng I H cắt B_1C_1; CC_1 lần lượt tại K_4; K_5 ta có thiết diện là lục giác $KK_1K_2K_3K_4K_5$.

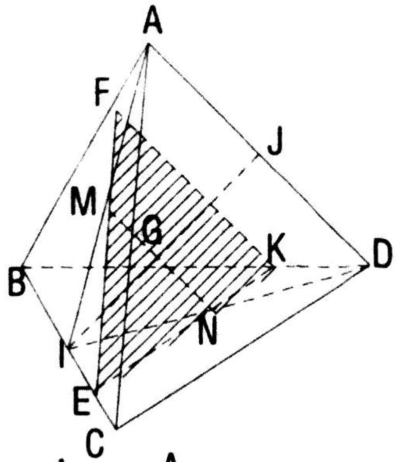
Bài 7: Cho một hình tứ diện ABCD. Xác định thiết diện của hình tứ diện ABCD khi bị cát ɔởi mặt phẳng (P) trong mỗi trường sau:

1. Mặt phẳng (P) đi qua trọng tâm G của hình tứ diện ABCD; qua điểm E thuộc cạnh BC và song song với AD.

2. Mặt phẳng (P) đi qua trọng tâm G của hình tứ diện ABCD và song song với BC; AD.



Giải



1. Gọi I; J lần lượt là trung điểm của cạnh CB; AD.

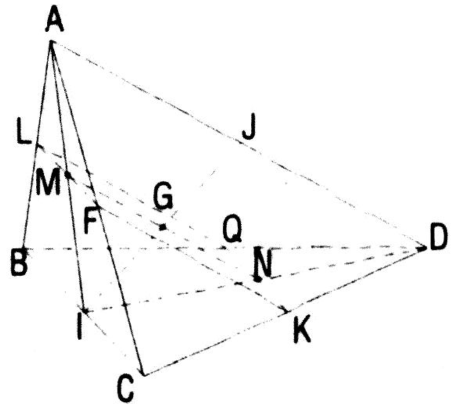
$\Rightarrow$ G là trung điểm đoạn thẳng IJ

Ta có AD // (P)

Mặt khác mặt phẳng (IAD) chứa AD và $(IAD) \cap (P) = Gn$

$\Rightarrow$ Gn // AD

Gọi M; N lần lượt là giao điểm của Gn với AI; DI

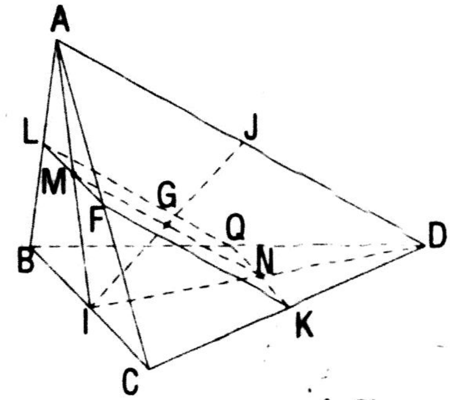


Trường hợp 1: E ≡ I

Không tồn tại thiết diện của hình tứ diện ABCD và mặt phẳng (P)

Trường hợp 2: E không trùng với I

Thiết diện của hình tứ diện ABCD và mặt phẳng (P) là tam giác FEK (tức là tam giác IFK).



2. Mặt phẳng (P) đi qua G và (P) // AD nên MN thuộc (P)

Ta có AD // (P)

Mặt khác mặt phẳng (IAD) chứa AD và $(IAD) \cap (P) = Gn$

$\Rightarrow$ Gn // AD

Gọi M; N lần lượt là giao điểm của Gn với AI; DI

Mặt khác ta có BC // (P)

Và $(P) \cap (ABC) = Mx$; $(P) \cap (BCD) = Ny$

$\Rightarrow$ Mx // CB và Ny // BC

Đường thẳng Mx cắt AB; CA lần lượt tại L; F

Đường thẳng Ny cắt BD; CD lần lượt tại Q; K

$\Rightarrow$ LF // KQ (1)

Ta có AD // (P); $(P) \cap (ABD) = LQ$; $(P) \cap (ACD) = FK$

$\Rightarrow$ AD// LQ; AD// FK $\Rightarrow$ FK // LQ (2)

Từ (1); (2) ta có thiết diện của hình tứ diện ABCD và mặt phẳng (P) là hình bình hành KQLF

Bài 8: Cho hình chóp tứ giác S.ABCD; đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (ABCD) sao cho đường thẳng Δ song song BD. M là trung điểm cạnh SA. Hãy xác định thiết diện của hình chóp tứ giác S.ABCD khi cắt bởi mặt phẳng (M, Δ)trong các trường hợp sau:

1. Đường thẳng Δ không cắt cạnh nào của đáy ABCD
2. Đường thẳng Δ đi qua điểm C
3. Đường thẳng Δ cắt hai cạnh BC và CD lần lượt tại hai điểm I và J
4. Đường thẳng Δ cắt hai cạnh AB; AD lần lượt tại hai điểm I'; J'

Giải

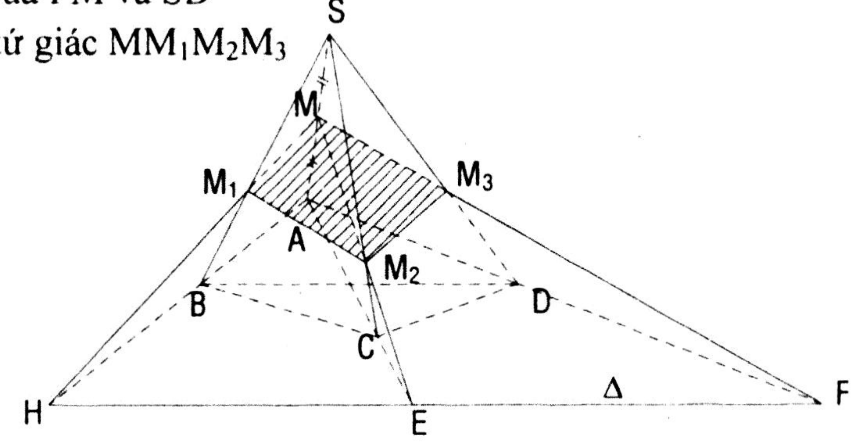
1. Gọi H; E; F lần lượt là các giao điểm của Δ với các đường thẳng AB; CA; AD

Gọi M_1 là giao điểm của HM và SB;

M_2 là giao điểm của EM và CS;

M_3 là giao điểm của FM và SD

Thiết diện cần tìm là tứ giác $MM_1M_2M_3$



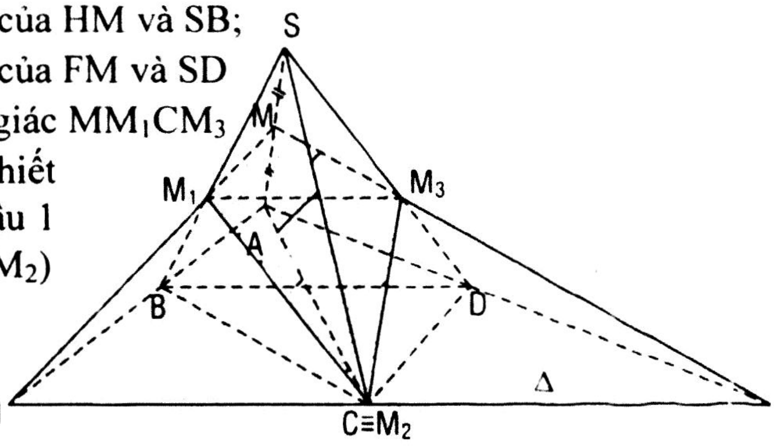
2. Gọi H; F lần lượt là các giao điểm của Δ với các đường thẳng AB; AD

Gọi M_1 là giao điểm của HM và SB;

M_3 là giao điểm của FM và SD

Thiết diện cần tìm là tứ giác MM_1CM_3

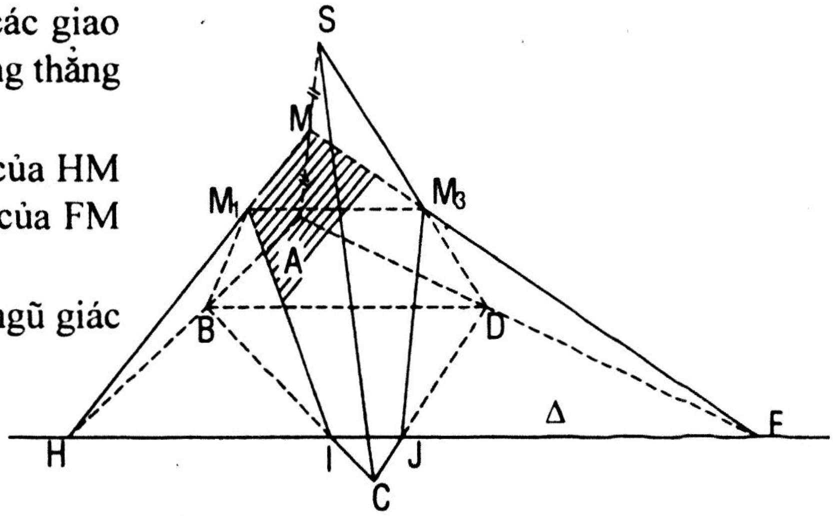
(*Chú ý: Xác định thiết diện câu 2 tương tự như câu 1 trong đó C trùng với điểm M_2)



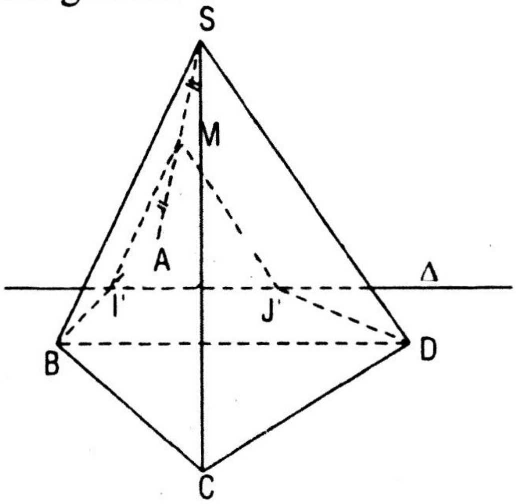
3. Gọi H; F lần lượt là các giao điểm của Δ với các đường thẳng AB; AD.

Gọi M_1 là giao điểm của HM và SB; M_3 là giao điểm của FM và SD

Thiết diện cần tìm là ngũ giác MM_1IJM_3



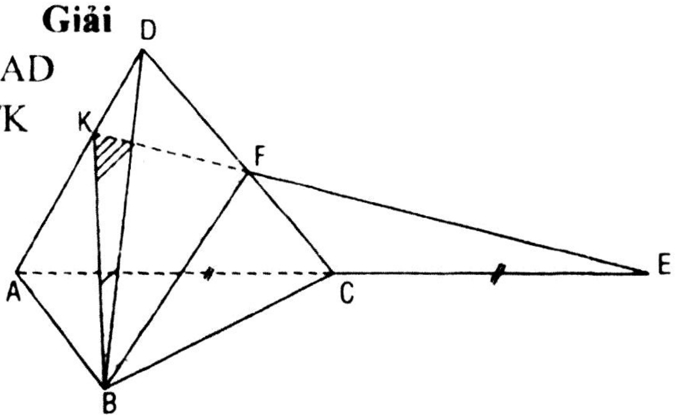
4. Thiết diện cần tìm là tam giác MI'J'



Bài 9: Cho hình tứ diện ABCD. Gọi E là điểm đối xứng của điểm A qua điểm C. Xác định thiết diện của hình tứ diện ABCD khi cắt bởi mặt phẳng đi qua B; E và một điểm F trong các trường hợp sau:

1. Điểm F nằm trên đoạn thẳng CD và không trùng với C; D.
2. Điểm F nằm trong tam giác ACD
3. Điểm F nằm trong đoạn thẳng DD'(D'là trọng tâm của tam giác ABC)

Giải

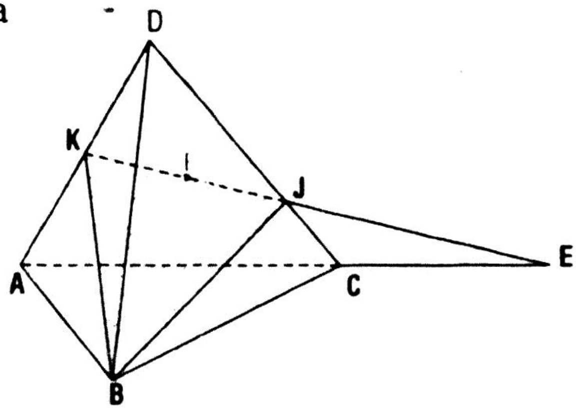


1. Gọi K là giao điểm của FE và AD

Thiết diện cần tìm là tam giác BFK

2. Gọi J; K lần lượt là giao điểm của FE với CD; AD

Thiết diện cần tìm là tam giác BJK.

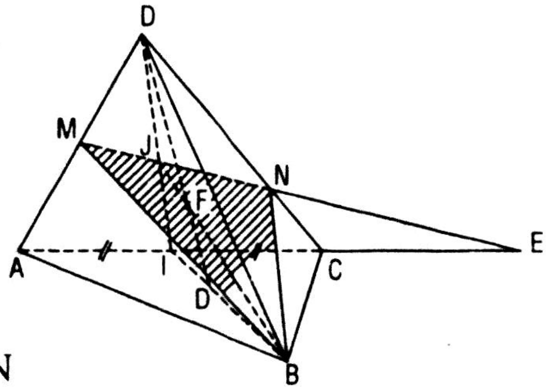


3. Gọi I là trung điểm cạnh CA.

Khi đó D' thuộc đoạn thẳng BI; trong mặt phẳng (BID) đường thẳng BF cắt DD' tại J.

Trong mặt phẳng (ACD) đường thẳng EJ cắt CD; AD lần lượt tại N; M.

Thiết diện cần tìm là tam giác BMN

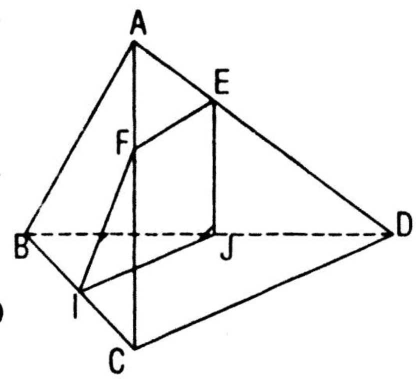


Bài 10: Cho hình tứ diện ABCD. Gọi I; J lần lượt là trung điểm của cạnh BC; BD; E là một điểm thuộc cạnh AD khác A; D.

1. Xác định thiết diện của hình tứ diện ABCD cắt bởi mặt phẳng (IJK).

2. Tìm vị trí của điểm E trên cạnh AD sao cho thiết diện câu 1 là hình bình hành.

3. Tìm điều kiện của hình tứ diện ABCD và vị trí của điểm E trên cạnh AD để thiết diện câu 1 là hình thoi



Giải

1. Ta có JI là đường trung bình của tam giác BCD

$\Rightarrow JI \parallel CD \Rightarrow CD \parallel (IJK)$

Ta có (IJK)$\cap$(ACD) = Et

$\Rightarrow$ Et // CD

Gọi F là giao điểm của Et và CA

$\Rightarrow$ EF // CD $\Rightarrow$ E F // JI

Vậy: Thiết diện cần tìm là hình thang IJEF (EF // JI).

2. Thiết diện IJEF là hình bình hành ta cần có thêm điều kiện: IF // JE

$\Leftrightarrow$ E là trung điểm cạnh AD

3. Thiết diện IJEF là hình thoi

$\Leftrightarrow$ Tứ giác IJEF là hình bình hành và JI = IF

$\Leftrightarrow$ E là trung điểm cạnh AD và $\frac{CD}{2} = \frac{AB}{2}$

$\Leftrightarrow$ E là trung điểm cạnh AD và CD = AB

Bài 11: Cho hình chóp tứ giác S.ABCD, đáy ABCD là một tứ giác lồi. Gọi M là trung điểm của cạnh SA; N là trung điểm của cạnh CS.

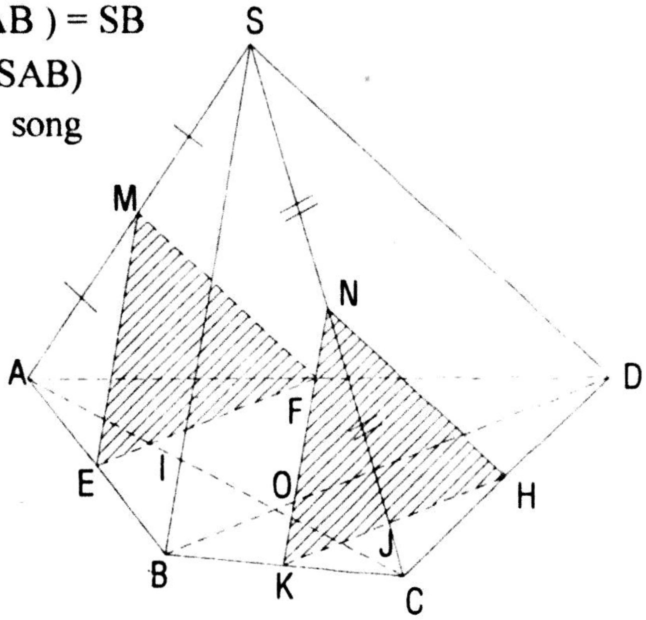
1. - Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD khi cắt bởi mặt phẳng (P) qua M và song song (SBD)

- Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD khi cắt bởi mặt phẳng (Q) qua N và song song (SBD)

2. Gọi I; J lần lượt là các giao điểm của đường thẳng CA với (P); (Q)

Chứng minh rằng: $JI = \frac{1}{2}CA$

Giải



1. Ta có (P) // (SBD); (SBD)$\cap$(SAB) = SB

$\Rightarrow$ Mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SAB) cắt nhau theo giao tuyến qua M và song song SB; giao tuyến này cắt AB tại E

Ta có (P) //(SBD);

(SBD)$\cap$ (ABCD) = BD

$\Rightarrow$ Mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABCD) cắt nhau theo giao tuyến qua E và song song BD, giao tuyến này cắt AD tại điểm F.

Ta có M F = (P)$\cap$(SAD).

Mà (SAD)$\cap$ (SBD) = SD

$\Rightarrow$ M F // SD

Thiết diện cần tìm là tam giácEFM đồng dạng với tam giác SBD

* Tương tự ta có thiết diện của hình chóp S.ABCD khi cắt bởi mặt phẳng (Q) qua N và song song (SBD) là tam giác KHN đồng dạng với tam giác SBD (NK // SB; NH // SD; KH // BD; K thuộc BC; H thuộc CD)

2. * Ta có $I = FE \cap CA$; $J = KH \cap CA$

Ta có M là trung điểm cạnh SA và ME // SB

$\Rightarrow$ E; F lần lượt là trung điểm cạnh AB; AD

Gọi O là giao điểm CA và BD

$\Rightarrow$ I là trung điểm đoạn thẳng AO

$\Rightarrow IO = \frac{1}{2}AO$

* Ta có N là trung điểm cạnh CS và NH // SD

$\Rightarrow$ H; K lần lượt là trung điểm cạnh CD; CB

$\Rightarrow$ J là trung điểm đoạn thẳng CO

$\Rightarrow JO = \frac{1}{2}CO$

Ta có $JI = JO + OI = \frac{1}{2}CO + \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}(CO + OA) = \frac{1}{2}CA$ (đpcm).

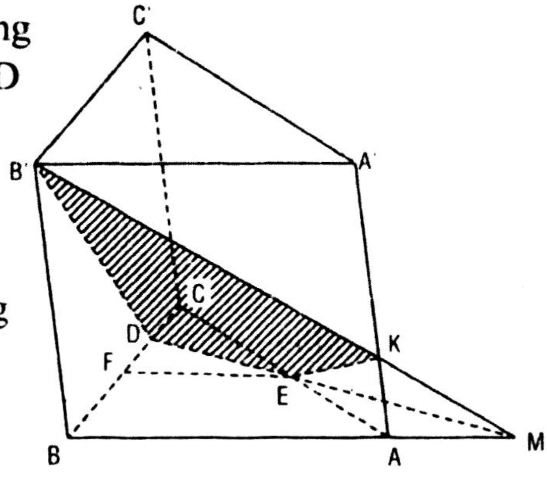
Bài 12: Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Trên đường thẳng BA lấy một điểm M sao cho A ở giữa M và B thỏa $MA = \frac{1}{2}AB$; E là trung điểm của cạnh CA.

1. Xác định giao điểm D của BC và mặt phẳng (MB'E).

2. Xác định thiết diện của hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' khi cắt bởi mặt phẳng qua M; B'; E.

3. Tính tỉ số $\frac{BD}{CD}$

Giải



1. Ta có ME và BC cùng thuộc mặt phẳng (ABC) và không song song nên cắt nhau tại D

$$\Rightarrow \begin{cases} D \in ME \subset (MB'E) \\ D \in BC \end{cases}$$

$\Rightarrow D = BC \cap (MB'E)$

2. Trong mặt phẳng (AA'B'B) đường thẳng B'M cắt AA' tại K

Thiết diện cần tìm là tứ giác EKB'D

3. Kẻ đường thẳng qua F song song AB cắt BC tại F.

Khi đó FE là đường trung bình của tam giác ABC

$\Rightarrow EF = \dfrac{AB}{2}$

Xét tam giác MBD ta có: $\dfrac{FD}{BD} = \dfrac{FE}{BM}$

Mặt khác ta có $MA = \dfrac{1}{2}AB \Rightarrow EF = MA$ và $BM = 3MA$

$\Rightarrow \dfrac{FD}{BD} = \dfrac{MA}{3MA} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow FD = \dfrac{1}{3}BD \Rightarrow FD = \dfrac{1}{2}BF \Rightarrow FD = \dfrac{1}{2}FC$

$\Rightarrow$ F là trung điểm của đoạn thẳng FC $\Rightarrow BD = 3CD \Rightarrow \dfrac{BD}{CD} = 3$

Bài 13: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm của cạnh CS, (P) là mặt phẳng qua qua AM và song song với BD. Gọi E; F lần lượt là giao điểm của (P) với các đường thẳng SB; SD.

1. Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD khi cắt bởi mặt phẳng (P)

2. Hãy tìm tỉ số diện tích của tam giác SME với tam giác SBC và tỉ số diện tích của tam giác SMF với tam giác SCD.

3. Gọi K là giao điểm của ME với CB; J là giao điểm của MF và CD. Hãy chứng minh rằng ba điểm K; A; J nằm trên một đường thẳng song song với EF và tìm tỉ số: $\dfrac{FE}{KJ}$

Giải

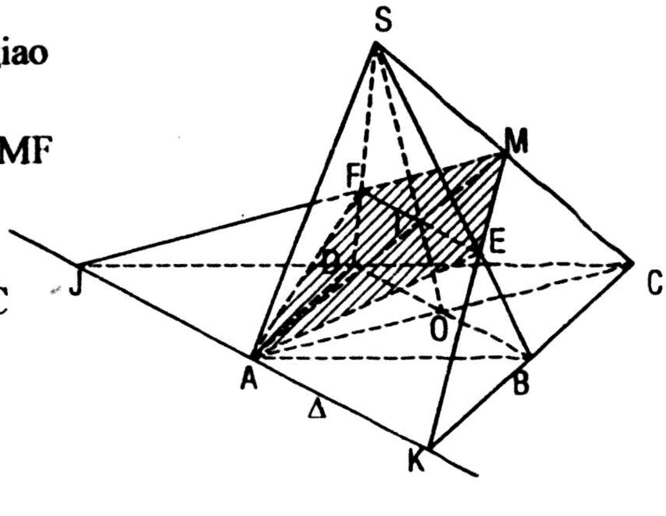
1. Trong mặt phẳng (SAC) hai đường thẳng SO và AM cắt nhau, gọi I là giao điểm của chúng.

Ta có BD// (P); (SBD) $\supset$ BD; (SBD) $\cap$ (P) = It

$\Rightarrow$ It // BD

Khi đó ta có E; F lần lượt là giao điểm của It và SB; SD

Thiết diện cần tìm là tứ giác AEMF



2. Ta có SO; AM là các đường trung tuyến của Δ SAC

Do đó I là trọng tâm của Δ SAC

$\Rightarrow \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{2}{3}$

Mặt khác ta có FE // BD nên $\frac{SE}{SB} = \frac{SI}{SO} = \frac{SF}{SD}$

Vậy $\frac{SE}{SB} = \frac{SI}{SO} = \frac{SF}{SD} = \frac{2}{3}$

Gọi $S_{\Delta SME}$; $S_{\Delta SBC}$ lần lượt là diện tích ΔSME; ΔSBC

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta SME}}{S_{\Delta SBC}} = \frac{SM.SE.\sin\widehat{MSE}}{SC.SB.\sin\widehat{BSC}} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Gọi $S_{\Delta SMF}$; $S_{\Delta SCD}$ lần lượt là diện tích ΔSMF; ΔSCD

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta SMF}}{S_{\Delta SCD}} = \frac{SM.SF.\sin\widehat{MSF}}{SC.SD.\sin\widehat{CSD}} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

3. Ta có A; K; J là các điểm chung của mặt phẳng (ABCD) và mặt phẳng (P) nên ba điểm A; K; J thuộc giao tuyến d của hai mặt phẳng này

Vậy: $d = (ABCD) \cap (P)$

Mặt khác ta có BD // FE mà $FE \subset (P)$ nên đường thẳng d // BD (đpcm)

Ta có $\frac{EF}{BD} = \frac{SE}{SB} = \frac{2}{3} \Rightarrow FE = \frac{2}{3}BD$

Ta có BD là đường trung bình của Δ CJK $\Rightarrow$ KJ = 2 BD

$$\Rightarrow \frac{FE}{KJ} = \frac{1}{3}$$

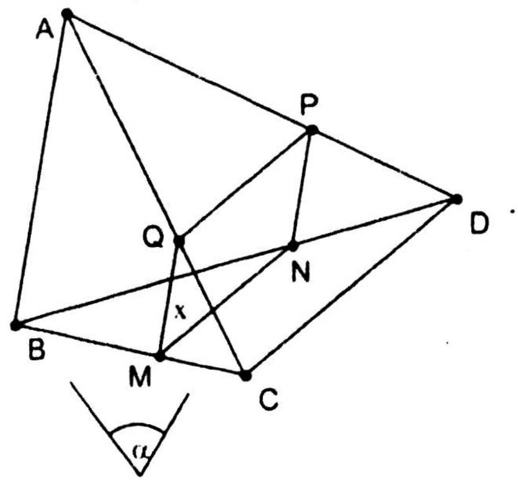
Bài 14: Cho tứ diện ABCD. Mặt phẳng α song song AB và CD. Biết AB = a; CD = b.

1. Nêu cách dựng và tính chất thiết diện của tứ diện ABCD khi cắt bởi mặt phẳng (P).

2. Xác định vị trí của mặt phẳng α sao cho diện tích của thiết diện là lớn nhất.

3. Xác định vị trí của mặt phẳng α sao cho thiết diện là hình thoi ?

Giải



1. Bài toán không mất tính tổng quát; giả sử mặt phẳng α cắt cạnh BC tại M.

Vậy mặt phẳng α qua M và song song AB; CD

+ Ta có $AB // \alpha$; $AB \subset (ABC)$;

$(ABC) \cap \alpha = Mx$

$\Rightarrow$ Mx // AB

Gọi Q là giao điểm của Mx và CA.

+ Ta có $CD // \alpha$; $CD \subset (ACD)$; $(ACD) \cap \alpha = Qt \Rightarrow Qt // CD$

Gọi P là giao điểm của Qt và AD.

+ Ta có $AB // \alpha$; $AB \subset (ABD)$; $(ABD) \cap \alpha = Py \Rightarrow Py // AB$

Gọi N là giao điểm của Py và BD.

Khi đó $MN = \alpha \cap (BCD) \Rightarrow MN // CD$

Vậy ta có: $MN // PQ$; $MQ // PN$

Thiết diện cần tìm là hình bình hành MNPQ

2. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng AB và CD

$\Rightarrow 0^0 < \varphi \le 90^0$ và $\widehat{NMQ} = \varphi$

Khi đó diện tích thiết diện MNPQ là:

$$S = MN.MQ.\sin\varphi = \frac{MN}{b}.\frac{MQ}{a}.ab\sin\varphi$$

Mặt khác ta có:

$$MQ // AB \Rightarrow \frac{MQ}{a} = \frac{CM}{CB} \quad (1)$$

$$MN // CD \Rightarrow \frac{MN}{b} = \frac{BM}{CB} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{MN}{b} + \frac{MQ}{a} = \frac{BM}{CB} + \frac{BM}{CB} = \frac{CM + BM}{CB} = 1$$

Theo bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$1 = \frac{MN}{b} + \frac{MQ}{a} \ge 2\sqrt{\frac{MN}{b}.\frac{MQ}{a}} \Rightarrow \frac{1}{4} \ge \frac{MN}{b}.\frac{MQ}{a}$$

$$\Rightarrow S \le \frac{1}{4}.ab\sin\varphi \quad (*)$$

Bất đẳng thức (*) xảy ra dấu "=" khi và chỉ khi:

$$\frac{MN}{b} = \frac{MQ}{a} \Leftrightarrow \frac{BM}{CB} = \frac{CM}{CB} \Leftrightarrow BM = MC$$

Vậy diện tích thiết diện MNPQ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}.ab\sin\varphi$

$\Leftrightarrow BM = MC \Leftrightarrow$ M là trung điểm cạnh BC

$\Leftrightarrow$ Mặt phẳng α cắt cạnh BC tại trung điểm của cạnh BC.

3. Thiết diện MNPQ là hình thoi ta cần có thêm điều kiện MN= MQ (3)

Từ (1) và (2): $MN = \frac{BM}{CB}.b$; $MQ = \frac{CM}{CB}.a$

$$(3) \Leftrightarrow \frac{BM}{CB}.b = \frac{CM}{CB}.a \Leftrightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = -\frac{a}{b}\overrightarrow{MC}$$

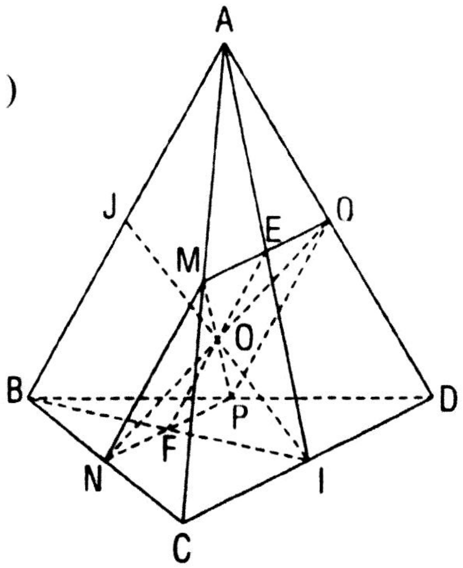
$\Leftrightarrow$ M chia đoạn thẳng BC theo tỉ lệ $-\frac{a}{b}$

Bài 15: Cho tứ diện ABCD. Qua điểm M nằm trên cạnh AC (M không trùng A; C) dựng mặt phẳng (P) song song với AB và CD. Mặt phẳng này lần lượt cắt BC; BD; AD tại N; P; Q.

1. Nêu tính chất thiết diện MNPQ của tứ diện ABCD cắt bởi mặt phẳng (P).

2. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo của tứ giác MNPQ. Tìm quỹ tích của điểm O khi M chạy trên đoạn thẳng AC(M không trùng A; C)

Giải



1. Ta có: $\begin{cases} AB // (P) \\ AB \subset (ABC) \\ (P) \cap (ABC) = MN \end{cases} \Rightarrow MN // AB$ (1)

Ta có: $\begin{cases} AB // (P) \\ AB \subset (ABD) \\ (P) \cap (ABD) = PQ \end{cases} \Rightarrow PQ // AB$ (2)

Ta có: $\begin{cases} CD // (P) \\ CD \subset (BCD) \\ (P) \cap (BCD) = NP \end{cases} \Rightarrow NP // CD$(3)

Ta có: $\begin{cases} CD // (P) \\ CD \subset (ACD) \\ (P) \cap (ACD) = QM \end{cases} \Rightarrow QM // CD$(4)

Từ (1); (2); (3); (4) suy ra MN // PQ; NP // QM.

Do đó tứ giác MNPQ là hình bình hành.

2. Ta có: O là giao điểm MP và NQ. Gọi I là trung điểm

Mặt khác ta có QM // CD nên AI cắt đoạn thẳng MQ tại trung điểm E của đoạn thẳng MQ.

Ta có NP // CD nên BI cắt đoạn thẳng NP tại trung điểm F của đoạn thẳng NP.

$\Rightarrow$ EF // MN

$\Rightarrow$ EF // AB và O là trung điểm đoạn thẳng EF.

Gọi J là trung điểm đoạn thẳng AB.

$\Rightarrow$ J là giao điểm của AB và IO

Vậy: điểm O thuộc đường thẳng cố định IJ

Mặt khác ta có điểm M chạy trên đoạn thẳng AC (M không trùng A; C) nên điểm O chạy trên đoạn thẳng IJ(O không trùng I; J)

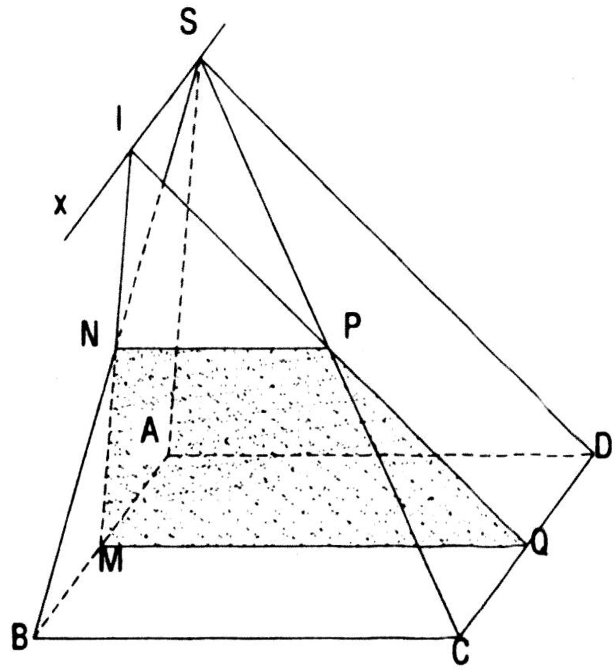
$\Rightarrow$ Quỹ tích của điểm O khi M chạy trên đoạn thẳng AC (M không trùng A; C) là đoạn thẳng IJ (trừ hai điểm I; J).

Bài 16: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Qua điểm M di động trên cạnh AB (M không trùng A; B) dựng mặt phẳng (P) song song với SA và BC. Mặt phẳng (P) lần lượt cắt SB; SC; CD tại N; P; Q.

1. Nêu tính chất thiết diện MNPQ của hình chóp S.ABCD cắt bởi mặt phẳng (P).

2. Gọi I là giao điểm của MN và PQ. Chứng minh rằng điểm I thuộc đường thẳng cố định.

Giải



1. Ta có: $\begin{cases} SA // (P) \\ SA \subset (ABS) \\ (P) \cap (ABS) = MN \end{cases}$

$\Rightarrow MN // SA$

Ta có: $\begin{cases} BC // (P) \\ BC \subset (BCS) \\ (P) \cap (BCS) = PN \end{cases}$

$\Rightarrow NP // BC$ (1)

Ta có: $\begin{cases} BC // (P) \\ BC \subset (ABCD) \\ (P) \cap (ABCD) = MQ \end{cases}$

$\Rightarrow MQ // BC$ (2)

Từ (1) và (2) ta có thiết diện MNPQ của hình chóp S.ABCD cắt bởi mặt phẳng (P) là hình thang.

2. Ta có I là giao điểm của MN và PQ.

$\Rightarrow \begin{cases} I \in MN \subset (SAB) \\ I \in PQ \subset (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow$ I thuộc (SAB) và I thuộc (SCD)

Mặt khác ta có S là một điểm chung của (SAB) và (SCD)

Ta có AB // CD

$\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx$ và Sx song song với AB; CD

Ta có S và hai đường thẳng AB; CD cố định nên Sx cố định

Do I thuộc (SAB) và I thuộc (SCD) nên I thuộc đường thẳng Sx điểm I thuộc đường thẳng cố định

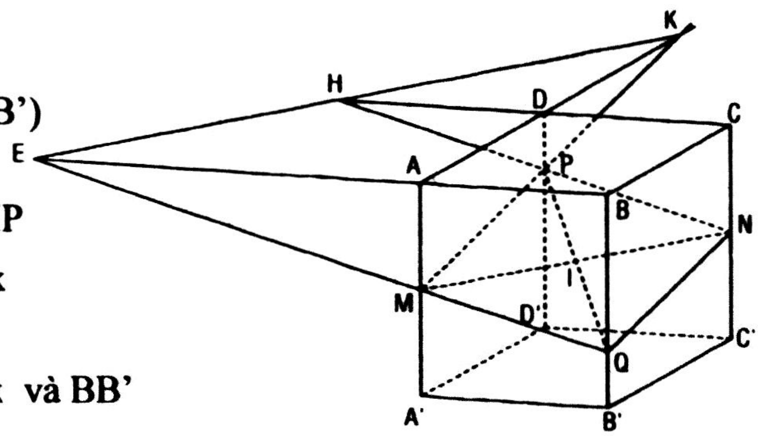
Vậy điểm M di động trên cạnh AB ta có I thuộc đường thẳng Sx cố định (đpcm).

Bài 17: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi M; N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AA'; CC'. Điểm P thuộc cạnh DD' (P không trùng với D; D'; trung điểm đoạn thẳng DD').

1. Xác định giao điểm của đường thẳng BB' với mặt phẳng (MNP).
2. Xác định thiết diện của hình hộp ABCD.A'B'C'D' cắt bởi mặt phẳng (MNP). Thiết diện này có tính chất gì.
3. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNP) và mặt phẳng (ABCD).

Giải

1.



Cách 1:

Ta có (ADD'A') // (BCC'B')

Mặt khác ta có:

$$\begin{cases}(ADD'A')\cap(MNP)=MP\\(BCC'B')\cap(MNP)=Nx\end{cases}$$

$\Rightarrow$ Nx // MP

Gọi Q là giao điểm của Nx và BB'

$$\Rightarrow\begin{cases}Q\in Nx\subset(MNP)\\Q\in BB'\end{cases}$$

$\Rightarrow Q = BB'\cap(MNP)$.

Cách 2:

Ta có M; N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AA'; CC'.

Do đó MN song song AC và A'C'

$\Rightarrow$ Đường thẳng nối hai tâm của hai hình bình hành ABCD và A'B'C'D' đi qua trung điểm I của đoạn thẳng MN

$\Rightarrow$ Điểm I thuộc mặt phẳng (BDD'B') và điểm I thuộc mặt phẳng (MNP).

Khi đó ta có $(BDD'B')\cap(MNP) = PI$

Gọi Q là giao điểm của hai đường thẳng đồng phẳng PI và BB'

$$\Rightarrow\begin{cases}Q\in Nx\subset(MNP)\\Q\in BB'\end{cases}$$

$\Rightarrow Q = BB'\cap(MNP)$.

2. Ta có (ADD'A') // (BCC'B')

Mặt khác ta có:

$$\begin{cases}(ADD'A')\cap(MNP)=MP\\(BCC'B')\cap(MNP)=NQ\end{cases}$$

$\Rightarrow NQ // MP(1)$

Ta có (ABB'A') // (CDD'C')

Mặt khác ta có:

$$\begin{cases}(ABB'A')\cap(MNP)=MQ\\(CDD'C')\cap(MNP)=NP\end{cases}$$

$\Rightarrow MQ // NP(2)$

Từ (1) và (2) ta có mặt phẳng (MNP) cắt hình hộp ABCD.A'B'C'D'theo thiết diện MPNQ là hình bình hành.

3. ***Cách 1:***

Điểm P không trùng trung điểm cạnh DD'nên MP không song song AD và NP không song song CD.

Gọi K là giao điểm của MP và AD; H là giao điểm của PN và CD.

$\Rightarrow HK = (ABCD)\cap(MNP)$

Cách 2:

Gọi E là giao điểm của AD và MQ; gọi T là giao điểm của BD và PQ

$\Rightarrow ET = (ABCD)\cap(MNP)$

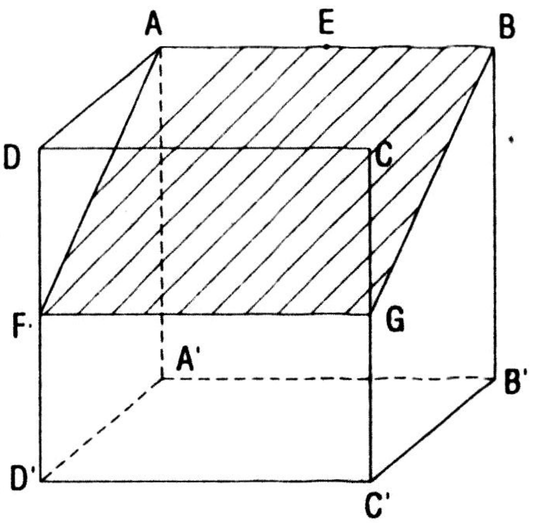
Chú ý: Bốn điểm H; K; E; T cùng thuộc hai mặt phẳng (ABCD); (MNP)

$\Rightarrow$ Bốn điểm H; K; E; T thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (ABCD); (MNP)

Do đó bốn điểm H; K; E; T thẳng hàng.

Bài 18: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi E; Flần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và DD'. Hãy xác định thiết diện của hình lập phương cắt bởi:

1. Mặt phẳng (EFB).
2. Mặt phẳng (EFC).
3. Mặt phẳng (EFC').
4. Mặt phẳng (EFK)(với K là trung điểm của cạnh B'C').



Giải

1. Ta có BE // C'D';

BE $\subset$ (EFB); C'D' $\subset$ (DCC'D')

Mặt khác ta có F là một điểm chung của (EFB) và (DCC'D')

$\Rightarrow$(EFB)$\cap$(DCC'D') = Fx thỏa mãn Fx // C'D' và Fx // BE

Gọi G là giao điểm của Fx và CC'. $\Rightarrow$ FG // AB; G $\in$(EFB).

Đoạn giao tuyến của (ABB'A') và (EFB) là đoạn thẳng AB

Vậy thiết diện của hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cắt bởi mặt phẳng (EFB) là tứ giác ABGF.

Ta có: (ADD'A') // (BCC'B')

Mặt khác ta có: (EFB) ∩ (ADD'A') = AF;

(EFB) ∩ (BCC'B') = BG

⇒ AF // BG

Vậy: Thiết diện của hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cắt bởi mặt phẳng (EFB) là tứ giác ABGF thỏa mãn FG // AB; AF // BG nên thiết diện cần tìm là hình bình hành ABGF.

2. Ta có: (ABB'A') // (CDD'C')

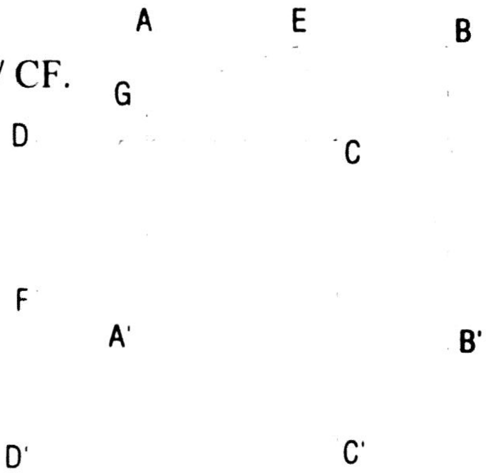
Mặt khác ta có: (EFC) ∩ (CDD'C') = CF

⇒ (EFC) ∩ (ABB'A') = En thỏa mãn En // CF.

⇒ En ⊂ (ABB'A')

Gọi G là giao điểm của En và AA'

⇒ EG // CF



Vậy: Thiết diện của hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cắt bởi mặt phẳng (EFC) là tứ giác CEGF thỏa mãn EG // CF nên thiết diện cần tìm là hình thang CEGF

3. Ta có: (ADD'A') // (BCC'B')

Mặt khác ta có F là một điểm chung của (EFC'); (ADD'A') và C'là một điểm chung của (EFC'); (BCC'B').

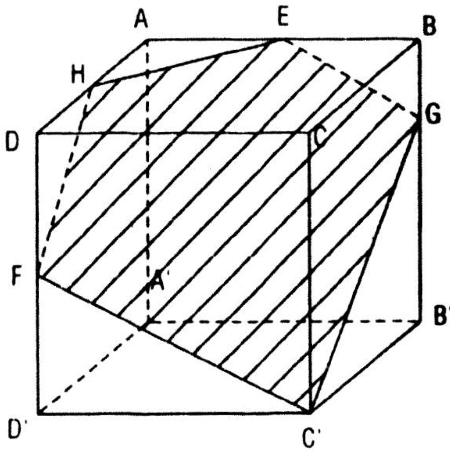
⇒ (EFC') ∩ (ADD'A') = Fm

và (EFC') ∩ (BCC'B') = C't

⇒ Fm // C't.

Gọi H là giao điểm của Fm và AD; G là giao điểm của C't và BB'.

⇒ H; G thuộc mặt phẳng (EFC').



Ta có: (ABB'A') // (CDD'C')

Mặt khác ta có: (EFC') ∩ (CDD'C') = C'F

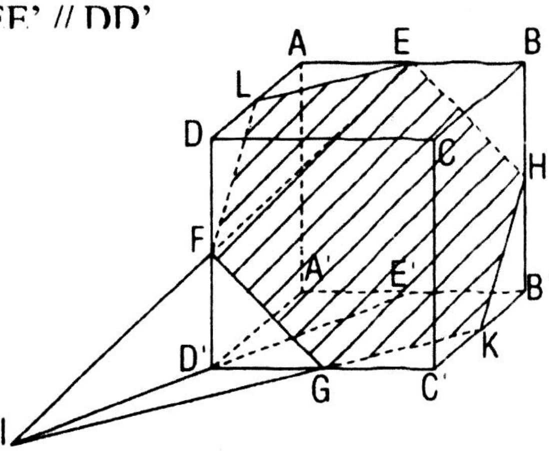
⇒ (EFC') ∩ (ABB'A') = Gy thỏa mãn Gy// C'F.

Gọi E là giao điểm của Gy và AB

⇒ (EFC') ∩ (ABCD) = EH

Vậy: Thiết diện của hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cắt bởi mặt phẳng (EFC') là ngũ giác C'FHEG.

4. Gọi E' là trung điểm cạnh A'B' $\Rightarrow$ EE' // DD'



Trong mặt phẳng (EDD'E') hai đ
thẳng EF và E'D' cắt nhau tại I.

$\Rightarrow$ IK = (EFK) $\cap$ (A'B'C'D').

Gọi G là giao điểm của IK và C'D'

$\Rightarrow$ FG = (EFK) $\cap$ (DCC'D').

Mặt khác ta có: (ABB'A') // (CDD'C

Mà (EFK) $\cap$ (CDD'C') = FG và E là một điểm chung của (EFK); (ABB'A') nên ta có (EFK) $\cap$ (ABB'A') = Eg thỏa mãn Eg // FG.

Gọi H là giao điểm của Eg và BB' $\Rightarrow$ HK = (EFK) $\cap$ (BB'C'C).

Mặt khác ta có (AA'D'D) // (BB'C'C) và F là một điểm chung của (EFK); (AA'D'D) nên (EFK) $\cap$ (AA'D'D) = Fk thỏa mãn Fk // KH

Gọi L là giao điểm của Fk và AD. Khi đó ta có: FL = (EFK) $\cap$ (A'B'C'D').

Vậy: Thiết diện của hình lập phương ABCD.A'B'C'D'cắt bởi mặt phẳng (EFK) là lục giác EHKGFL

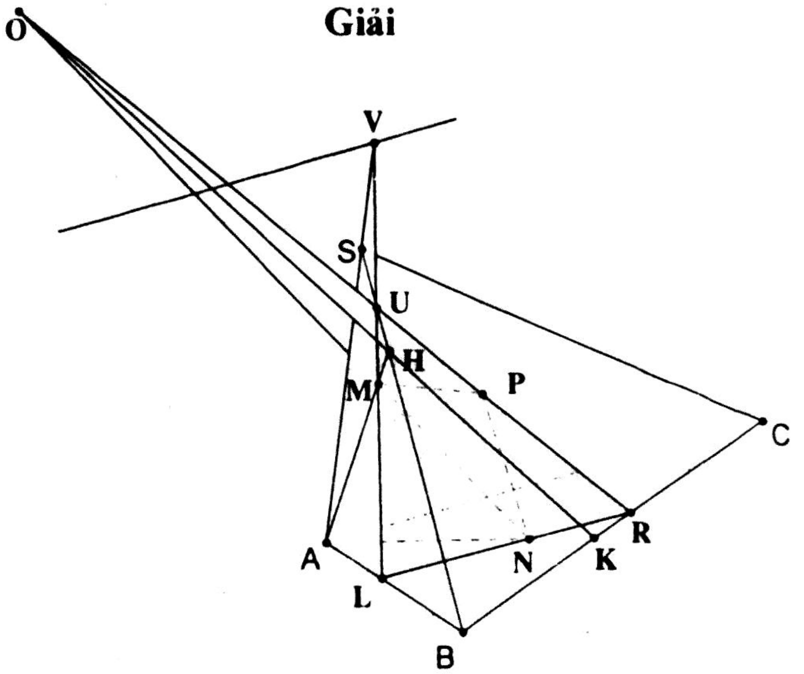
Bài 19: Cho hình tứ diện SABC. Gọi M; N; P lần lượt là ba điểm nằm trong tam giác SAB; ABC; SBC.

1. Xác định giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SBC)

2. Giả sử tia AS cắt mặt phẳng (MNP) ở ngoài đoạn thẳng SA và AC // (MNP). Xác định thiết diện của hình tứ diện SABC cắt bởi mặt phẳng (MNP).

3. Giả sử bài toán không có sự song song. Xác định thiết diện của hình tứ diện SABC cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Giải



1. Gọi H là giao điểm của AM và SB;

K là giao điểm của ANvà BC.

Ta có MN $\subset$ (AHK) và HK = (AHK) $\cap$ (SBC)

Gọi O là giao điểm của MN và Giải

$\Rightarrow$ O $\in$ MN và O $\in$ HK $\subset$ (SBC) $\Rightarrow$ O = MN $\cap$ (SBC).

2. Gọi U = OP $\cap$ SB; R = OP $\cap$ BC; V = MU $\cap$ SA

$\Rightarrow$ V = SA $\cap$ (MNP). (V ở ngoài đoạn thẳng SA)

Mặt khác ta có AC // (MNP) và AC $\subset$ (SAC);

AC $\subset$ (ABC); (ABC) $\cap$ (MNP) = NR; (SAC) $\cap$ (MNP) = Vn.

$\Rightarrow$ NR // AC; Vn //AC và Vn không cắt SC.

Gọi L là giao điểm của UM và AB.

Khi đó U; M; L là các điểm chung của hai mặt phẳng (MNP) và (SAB)

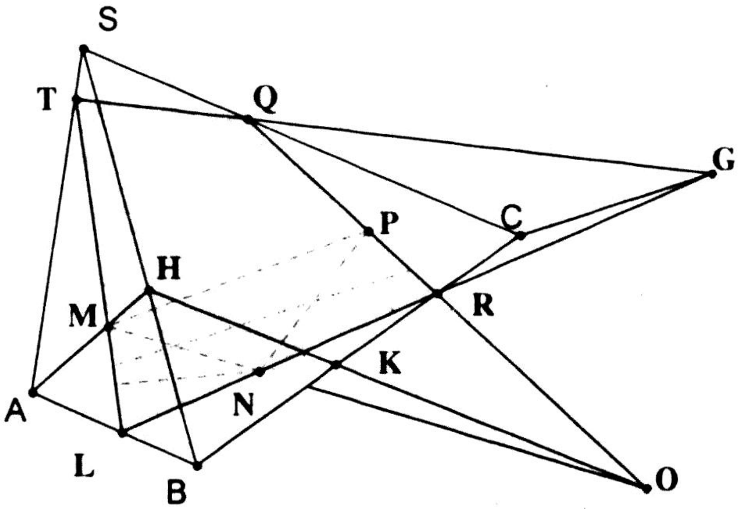
$\Rightarrow$ Ba điểm U; M; L thẳng hàng.

Vậy thiết diện của hình tứ diện SABC cắt bởi mặt phẳng (MNP) là tam giác RLU.

3. Bài toán không mất tính tổng quát giả sử OP cắt BC; SC lần lượt tại R; Q. Gọi L; G lần lượt là giao điểm của đường thẳng NR và AB; AC.

Gọi T là giao điểm của GQ và SA.

Khi đó ta có T; L; M thẳng hàng.

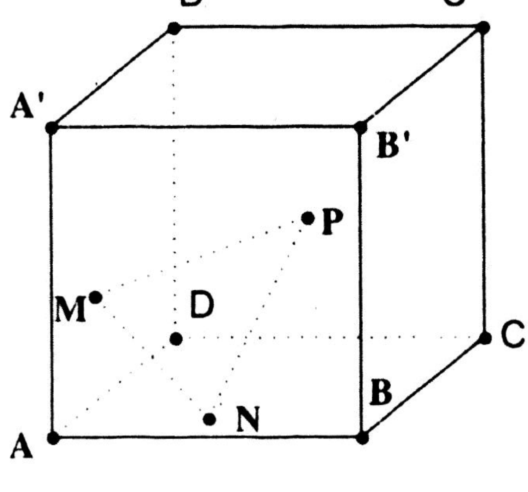


Vậy thiết diện của hình tứ diện SABC cắt bởi mặt phẳng (MNP) là tứ giác LTQR.

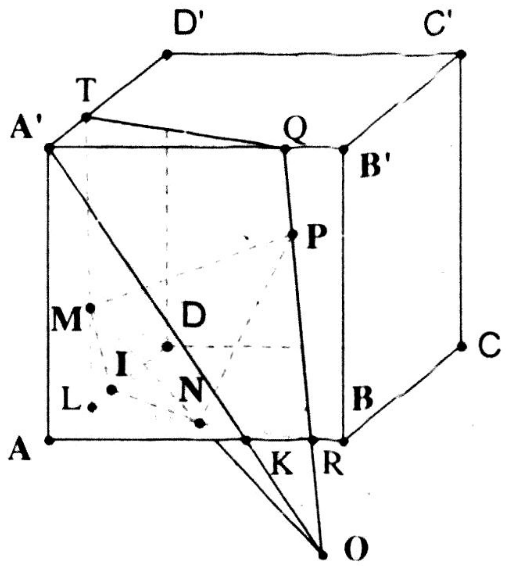
Bài 20: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi M; N; P lần lượt là ba điểm nằm bên trong ba hình vuông A'ADD'; ABCD; A'ABB' (ba điểm M; N; P được chọn như hình vẽ)

1. Xác định giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (ABCD)

2. Xác định thiết diện của hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cắt bởi mặt phẳng (MNP)



Giải



1. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng A'M và AD.

Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng IN và AB.

Khi đó ta có MN $\subset$(HKA');

KA' = (IKA')$\cap$(A'ABB').

Gọi O là giao điểm của MN và KA'.

$\Rightarrow$ O $\in$MN; O $\in$KA' $\subset$(A'ABB')

$\Rightarrow$ O = MN $\cap$(A'ABB').

2. Gọi R là giao điểm của OP và AB;

Q là giao điểm của OP và A'B';

L là giao điểm của NR và AD;

T là giao điểm của LM và A'D'.

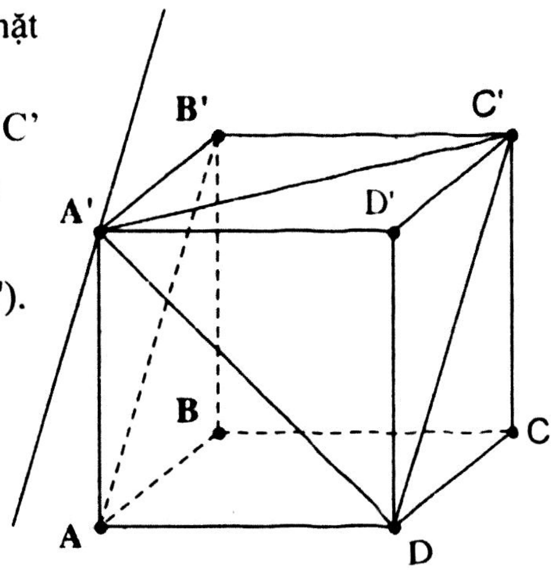
Vậy thiết diện của hình lập phương ABCD.A'B'C'D' khi cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Bài 21: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'có cạnh bằng a.

1. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (A'DC') và (ABB'A')

2. Gọi K; H lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AD; DC và I là một điểm trên cạnh BB' sao cho B'I = 3IB. Xác định thiết diện của hình lập phương ABCD. A'B'C'D'cắt bởi mặt phẳng (KHI).

Giải



1. Ta có A' là một điểm chung của hai mặt phẳng (A'DC') và (ABB'A').

Mặt khác ta có AD // B'C' và AD = B'C'

$\Rightarrow$ Tứ giác ADC'B' là hình bình hành

$\Rightarrow$ AB' // DC'.

Ta có AB' $\subset$(ABB'A'); DC' $\subset$(A'DC').

Do đó (ABB'A')$\cap$(A'DC') = A'n thỏa mãn A'n // AB'; A'n //DC'

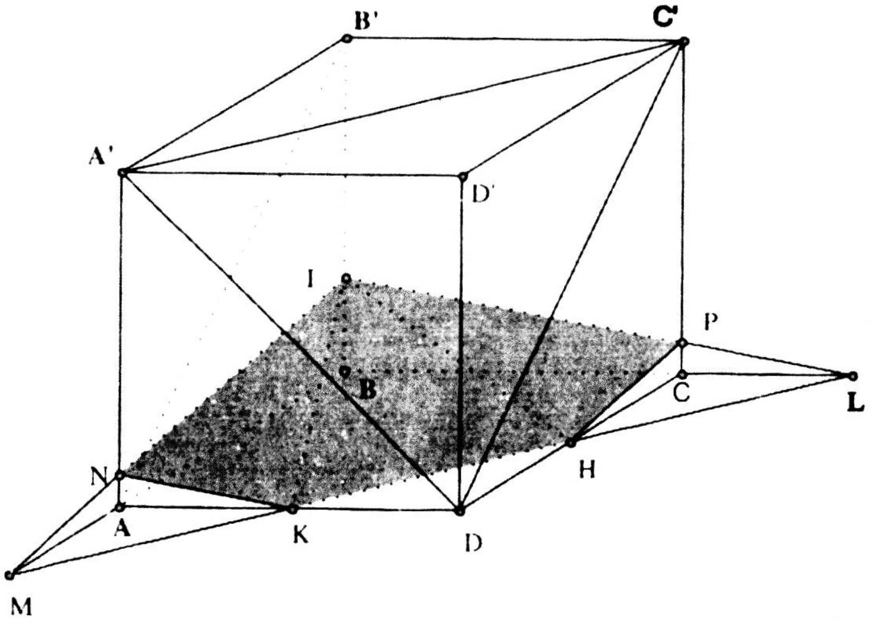
2. Gọi M là giao điểm của HK và AB;

N là giao điểm của MI và AA';

L là giao điểm của HK và BC

P là giao điểm của IL và CC'.

Vậy thiết diện của hình lập phương ABCD.A'B'C'D' khi cắt bởi mặt phẳng (KHI) là ngũ giác IPHKN.



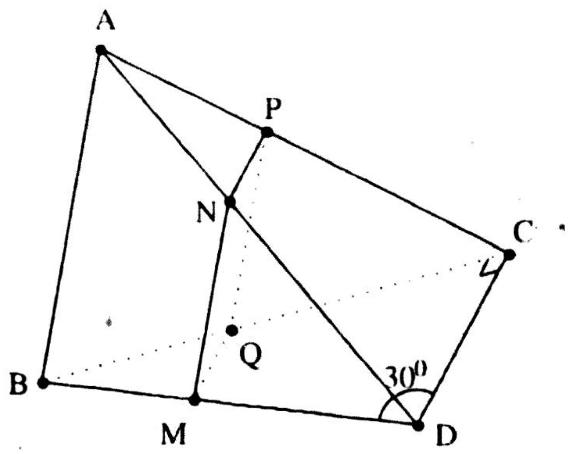
Bài 22: Cho tứ diện ABCD có AB $\perp$ CD; ΔBCD vuông tại C; $\widehat{BDC} = 30^0$. Gọi M là điểm di động trên BD; mặt phẳng (P) qua M và song song AB; CD.

1. Xác định thiết diện của hình tứ diện ABCD cắt bởi mặt phẳng (P). Thiết diện là hình gì?

2. Giả sử AB = BD = a; BM = x(0 < x < a). Tính diện tích S của thiết diện câu 1 theo a và x. Xác định x để S đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất này.

3. Với giả thiết câu 2, xác định x để thiết diện câu 1 có hai đường chéo vuông góc nhau.

Giải



1. Ta có AB // (P)

Mặt khác mặt phẳng (P) cắt mặt phẳng (ABD) theo giao tuyến d qua M

$\Rightarrow$ d // AB.

Gọi N là giao điểm của đường thẳng d và AD

Ta có CD // (P) và $(P) \cap (ACD) = Nx$; $(P) \cap (BCD) = My$

$\Rightarrow$Nx; My cùng song song đường thẳng CD.

Gọi P = Nx $\cap$ AC; Q = My $\cap$ BC.

$\Rightarrow$ NP // MQ và PQ = $(P) \cap (ABC)$

Mặt khác ta có AB // (P) và AB $\subset$ (ABC)

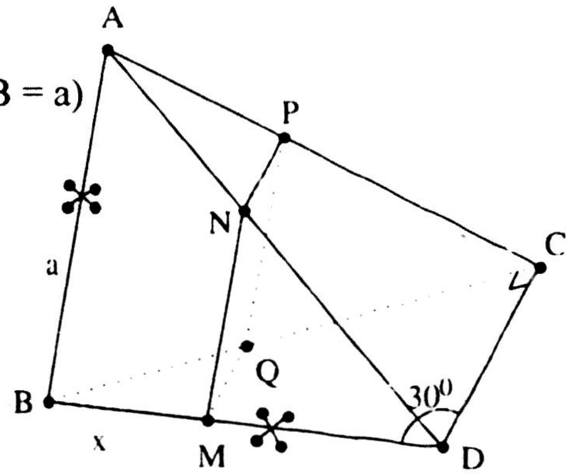
$\Rightarrow$AB // PQ $\Rightarrow$ MN // PQ.

Ta có AB $\perp$ CD nên MN $\perp$ MQ.

Vậy ta có NP // MQ; MN // PQ; MN $\perp$ MQ

Do đó thiết diện của hình tứ diện ABCD cắt bởi mặt phẳng (P) là hình chữ nhật MNPQ.

2. Diện tích S của hình chữ nhật MNPQ là: S = MN. MQ (*)



Ta có MN // AB $\Rightarrow \dfrac{MN}{AB} = \dfrac{DM}{DB}$

$\Rightarrow$ MN = DM = a – x (1) (vì AB = DB = a)

Ta có MQ // DC $\Rightarrow \dfrac{MQ}{DC} = \dfrac{BM}{BD}$.

Mà DC = $\dfrac{BD\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{MQ}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{x}{a} \Rightarrow MQ = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$ (2)

Thay (1); (2) vào (*) ta được: S = $(a - x).\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$

* Xác định x để $S = (a - x).\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$ đạt giá trị lớn nhất:

Ta có $S = (a - x).\dfrac{x\sqrt{3}}{2} \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}([\dfrac{(a - x) + x}{2}]^2 = \dfrac{\sqrt{3}.a^2}{8}$ (a)

Bất đẳng thức (a) xảy ra dấu "=" $\Leftrightarrow a - x = x \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2}$

Vậy diện tích S đạt gía trị lớn nhất là $S_{max} = \dfrac{\sqrt{3}.a^2}{8}$ khi và chỉ khi $x = \dfrac{a}{2}$

(M là trung điểm đoạn thẳng BD)

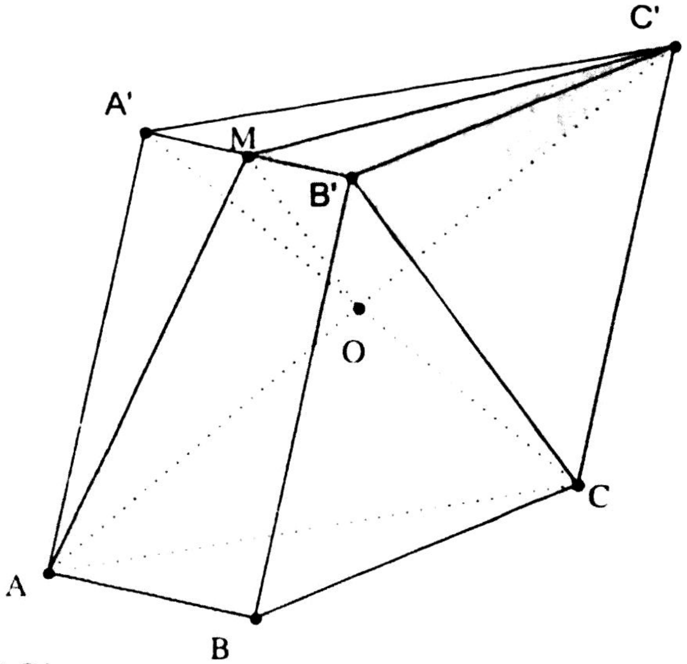
3. Thiết diện câu 1 có hai đường chéo vuông góc nhau $\Leftrightarrow$ hình chữ nhật MNPQ có hai đường chéo vuông góc với nhau $\Leftrightarrow$ tứ giác MNPQ là hình vuông

Do đó để thiết diện câu 1 có hai đường chéo vuông góc nhau ta cần có thêm điều kiện MN = MQ

$\Leftrightarrow a - x = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = 2a(2 - \sqrt{3})$

Vậy giá trị cần tìm của x là: $x = 2a(2 - \sqrt{3})$

Bài 23: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng AC' và song song với đường thẳng B'C. Xác định thiết diện của hình lăng trụ ABC.A'B'C' cắt bởi mặt phẳr



Gọi O = AC' $\cap$ A'C

Ta có AC' $\subset$ (P) $\Rightarrow$ O $\in$ (P)

Mặt khác ta có B'C // (P)

và (P) $\cap$ (CA'B') = Ot

$\Rightarrow$ Ot // B'C

Gọi M là giao điểm của Ot và A'B'.

Khi đó M là trung điểm của đoạn thẳng A'B'

(Vì O là trung điểm của đoạn thẳng A'C; OM // CB')

Vậy ta có: $\begin{cases} (P) \cap (ACC'A') = AC' \\ (P) \cap (ABB'A') = AM \\ (P) \cap (A'B'C') = C'M \end{cases}$

Do đó thiết diện cần tìm là tam giác AMC'(M là trung điểm của đoạn thẳng A'B').

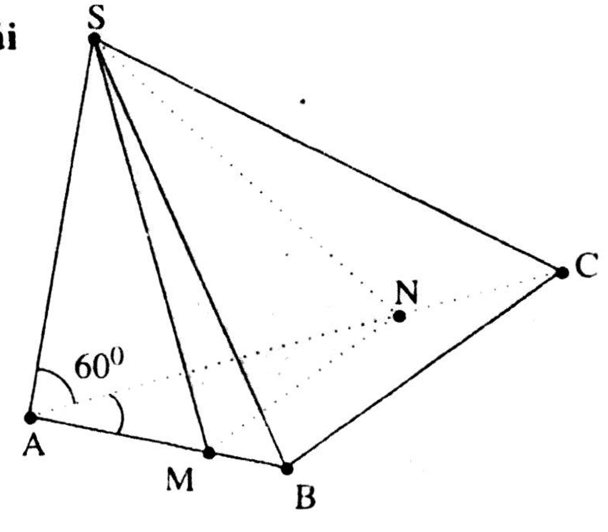
Bài 24: Cho tứ diện đều SABC có cạnh a. Mặt phẳng (P) qua S và song song BC cắt AB; AC lần lượt tại M; N.

1. Xác định thiết diện của hình tứ diện đều SABC cắt bởi mặt phẳng (P). Thiết diện đó là hình gì?

2. Đặt y = $SM^2 + SN^2 + MN^2$;(với AM = x; 0 < x < a).

3. Xác định vị trí của M trên AB để y đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

Giải



1. Ta có BC //(P); BC $\subset$ (ABC);

MN = (P) $\cap$ (ABC)

$\Rightarrow$ MN // BC

$\Rightarrow$ Thiết diện của hình tứ diện đều SABC cắt bởi mặt phẳng (P) là ΔSMN

Mặt khác ta có MN // BC

$\Rightarrow \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} \Rightarrow AM = AN$

(vì hình tứ diện SABC đều nên AB = AC)

$\Rightarrow \Delta SAM = \Delta SAN$ (c.g.c) $\Rightarrow SM = SN$

Vậy thiết diện cần tìm là ΔSMN cân tại S.

2. Ta có AM = AN và $\widehat{MAN} = 60^0$

$\Rightarrow \Delta AMN$ đều $\Rightarrow MN = AM = x$

Ta có $SN^2 = SM^2 = SA^2 + AM^2 - 2SA.AM.\cos 60^0 = a^2 + x^2 - ax$.

Do đó ta có $y = 2(a^2 + x^2 - ax) + x^2 = 3x^2 - 2ax + 2a^2$

$$= 3(x - \frac{a}{3})^2 + \frac{5a^2}{3} \geq \frac{5a^2}{3} (*)$$

Bất đẳng thức (*) xảy ra dấu "="

$\Leftrightarrow x - \frac{a}{3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{3} \Leftrightarrow AM = \frac{a}{3} \Leftrightarrow BM = a - \frac{a}{3} = \frac{2a}{3}$

Khi đó $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{MA} = -\frac{MA}{MB}\overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$

Vậy y đạt giá trị nhỏ nhất là $y_{min} = \frac{5a^2}{3}$ khi và chỉ khi điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k = -\frac{1}{2}$ ($\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$)

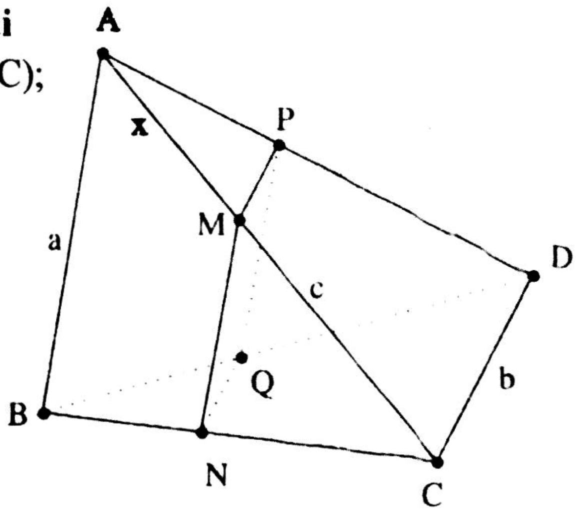
Bài 25: Cho tứ diện ABCD có AB =a; CD =b; AC = c. Gọi M là điểm bất kì trên cạnh AC(M không trùng A; C)

1. Qua điểm M dựng mặt phẳng (P)song song với AB và CD. Xác định thiết diện của hình tứ diện ABCD cắt bởi mặt phẳng (P). Thiết diện thu được là hình gì?

2. Khi nào thiết diện câu 1 là hình chữ nhật?

3. Đặt AM = x (0 < x < c). Tính diện tích S của thiết diện câu 1 trong trường hợp AB ⊥ CD. Tìm vị trí của M trên cạnh AC để S đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó.

Giải



1. Ta có AB // (P); CD // (P); AB ⊂ (ABC); CD ⊂ (ACD); M ∈ AC; M ∈ (P)

$$\Rightarrow \begin{cases} (P) \cap (ABC) = Mt // AB \\ (P) \cap (ACD) = Mn // CD \end{cases}$$

Gọi $N = Mt \cap BC$; $P = Mn \cap AD$.

$\Rightarrow$ MN // AB; MP // CD.

Ta có N ∈ (P); N ∈ (BCD); CD // (P); CD ⊂ (BCD).

$\Rightarrow (P) \cap (BCD) = Ny // CD$.

Gọi $Q = Ny \cap BD$.

$\Rightarrow PQ = (P) \cap (ABD)$; $NQ // MP$

Mặt khác ta có $AB // (P)$; $AB \subset (ABD)$.

$\Rightarrow PQ // AB \Rightarrow PQ // MN$

Vậy thiết diện của hình tứ diện ABCD cắt bởi mặt phẳng (P) là tứ giác MNQP có $PQ // MN$ và $NQ // MP$. Do đó thiết diện cần tìm là hình bình hành MNQP.

2. Thiết diện MNQP là hình chữ nhật khi có thêm điều kiện $\widehat{MNQ} = 90^0$

Mặt khác ta có góc của hai đường thẳng MN; NQ là góc của hai đường thẳng AB; CD

Do đó $\widehat{MNQ} = 90^0$ khi và chỉ khi $AB \perp CD$.

Vậy thiết diện câu 1 là hình chữ nhật khi $AB \perp CD$.

3. Khi $AB \perp CD$ ta có tứ giác MNQP là hình chữ nhật. Do đó thiết diện câu 1 có diện tích S là:

$$S = MN.NQ$$

Ta có $MN // AB \Rightarrow \dfrac{MN}{AB} = \dfrac{CM}{CA} \Rightarrow \dfrac{MN}{AB} = \dfrac{CA - AM}{CA}$

$\Rightarrow MN = AB.\dfrac{CA - AM}{CA} \Rightarrow MN = a.\dfrac{c - x}{c}$

Ta có $NQ // CD \Rightarrow \dfrac{NQ}{CD} = \dfrac{BN}{BC}$ (1)

Mặt khác ta có $MN // AB \Rightarrow \dfrac{BN}{BC} = \dfrac{AM}{AC}$ (2)

Thay (2) vào (1) ta được $\dfrac{NQ}{CD} = \dfrac{AM}{AC} \Rightarrow NQ = \dfrac{AM}{AC}.CD \Rightarrow NQ = \dfrac{x}{c}.b$

Do đó $S = a.\dfrac{c - x}{c}.\dfrac{x}{c}.b = x(c - x).\dfrac{ab}{c^2} \leq \dfrac{ab}{c^2}\left[\dfrac{x + (c - x)}{2}\right]^2 = \dfrac{ab}{4}$ (*)

Bất đẳng thức (*) xảy ra dấu "=" $\Leftrightarrow x = c - x \Leftrightarrow x = \dfrac{c}{2}$

$\Leftrightarrow$ M là trung điểm của đoạn thẳng AC.

Vậy diện tích S đạt giá trị lớn nhất là $S_{max} = \dfrac{ab}{4}$ khi và chỉ khi M là trung điểm của đoạn thẳng AC.

***Bạn đọc giải thêm một số bài sau*:**

Bài 26: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Trên các cạnh AA'; BC lần lượt lấy các điểm M và N không trùng với các đỉnh của hình hộp. Trong hình bình hành A'B'C'D' lấy một điểm P. Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Bài 27:

1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O; CA = a; BD = b; ΔSBD đều. Mặt phẳng (P) di động song song mặt phẳng (SBD) và luôn qua điểm I trên cạnh AC.

   a. Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD với mặt phẳng (P)

   b. Tính diện tích của thiết trên theo a; b và x = AI.

2. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a; đường cao SO = $a\sqrt{3}$

   a. M là điểm trên đoạn thẳng OC; AM = x. Qua điểm M dựng mặt phẳng (P) song song SA và BD. Nêu cách dựng thiết diện và tính diện tích thiết diện theo a và x.

   b. M là điểm trên đoạn thẳng OA; AM = x. Qua điểm M dựng mặt phẳng (P) song song SA và BD. Nêu cách dựng thiết diện và tính diện tích thiết diện theo a và x.

4. Bài toán 4: Chứng minh đường thẳng song song mặt phẳng. Chứng minh hai mặt phẳng song song

Phương pháp:

- Chứng minh đường thẳng d song song mặt phẳng (P)

  + *Cách 1*: Ta chứng minh d không chứa trong mặt phẳng (P) và d // a $\subset$(P)

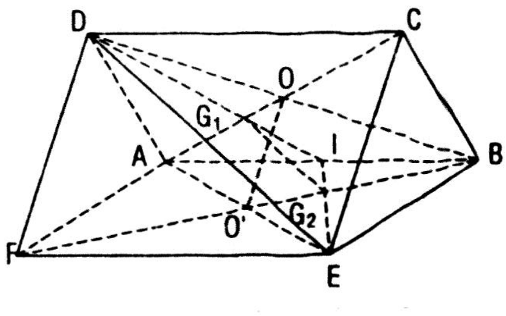
  + *Cách 2*: Chứng minh d thuộc mặt phẳng α và α // (P)

- Chứng minh hai mặt phẳng α ; β song song ta chứng minh có hai đường thẳng d;d' cắt nhau trong α lần lượt song song β.

Ví dụ:

Bài 1: Cho hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O; O' lần lượt là tâm của các ABCD và ABEF. Gọi G_1; G_2 lần lượt là trọng tâm của tam giác ABD; ABE. Chứng minh rằng:

1. OO' //(ADF)
2. OO' //(BCE)
3. G_1G_2 // (CEF)



Giải

1. Ta có OO' là đường trung bình của tam giác BDF nên OO' // DF$\subset$(ADF)

$\Rightarrow$ OO' // (ADF) (đpcm)

2. Ta có OO'// DF

$\Rightarrow$ OO'// CE $\subset$ (BCE) $\Rightarrow$ OO' // (BCE) (đpcm)

3. Gọi I là trung điểm cạnh AB

$\Rightarrow$ I là giao điểm của DG_1 và EG_2

$\Rightarrow \frac{IG_1}{ID} = \frac{IG_2}{IE} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow G_1G_2$ // DE Mà DE $\subset$(CEF) $\Rightarrow G_1G_2$ // (CEF) (đpcm)

Bài 2: Cho hình chóp S.ABC. Gọi I; J; K lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB; SBC; SAC.

1. Chứng minh rằng: (IJK) // (ABC).

2. Tìm tập hợp các điểm M nằm trong hình chóp S.ABC sao cho KM song song mặt phẳng (ABC)

Giải

1. Chứng minh rằng (IJK)//(ABC)

Gọi I' là giao điểm của các đường thẳng SI và AB;

J' là giao điểm của các đường thẳng SJ và BC

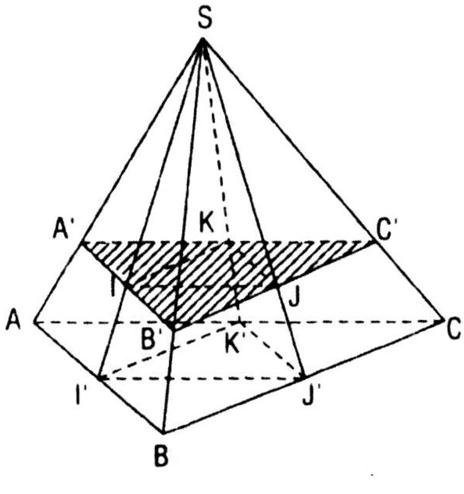
K' là giao điểm của các đường thẳng SK và CA.

Ta có $\frac{SI}{SI'} = \frac{SK}{SK'} = \frac{SJ}{SJ'} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow$ IK // I'K'; KJ //K'J'

Mà I'K' $\subset$(ABC); K'J' $\subset$(ABC)

$\Rightarrow$ (IJK)//(ABC)



2. Ta có KM // (ABC) khi và chỉ khi KM thuộc mặt phẳng (P) qua K và song song (ABC)

Gọi A'; B'; C' lần lượt là các giao điểm điểm của (P) với SA; SB; CS.

Khi đó A'B' //AB; B'C' // BC; C'A' //CA.

Theo giả thiết M nằm trong hình chóp S.ABC nên tập hợp các điểm M thỏa bài toán là tam giác A'B'C'.

Bài 3: Cho hình chóp S.ABCD đáy là một tứ giác lồi. Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của hai tam giác SAB và SAD; E là trung điểm của cạnh CB.

1. Chứng minh rằng: MN // DB

2. Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD khi cắt bởi mặt phẳng (MNE).

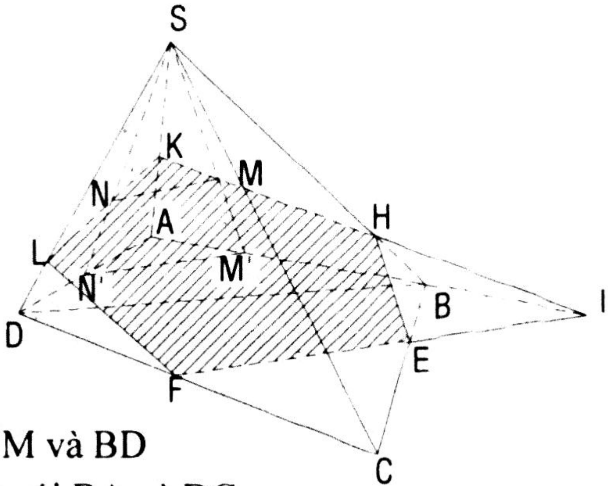
3. Gọi H; L lần lượt là các giao điểm của mặt phẳng (MNE) với các cạnh SB; SD. Chứng minh rằng LH // BD.

Giải

1. Gọi M' là giao điểm của SM với AB; N' là giao điểm của SN với AD

$\Rightarrow$ N'; M' lần lượt là trung điểm cạnh AD; AB.

và ta có $\dfrac{N'N}{N'S} = \dfrac{M'M}{M'S} = \dfrac{1}{3}$



$\Rightarrow$ NM // N'M' và M'N' // BD

$\Rightarrow$ NM // BD (đpcm)

2. Ta có E là một điểm chung của hai mặt phẳng (MNE); (ABCD).

Mặt khác ta có NM // BD nên (MNE) $\cap$ (ABCD) = Et

$\Rightarrow$ Et song song với đường thẳng NM và BD

Gọi I; F lần lượt là giao điểm của Et với BA và DC

Đường thẳng IM cắt SA; SB lần lượt ở K; H.

Đường thẳng KN cắt SD ở L

Thiết diện cần tìm là ngũ giácLFEHK

3. Ta có NM $\subset$ (MNE); BD $\subset$ (SBD); MN// BD và (MNE) $\cap$ (SBD) = HL

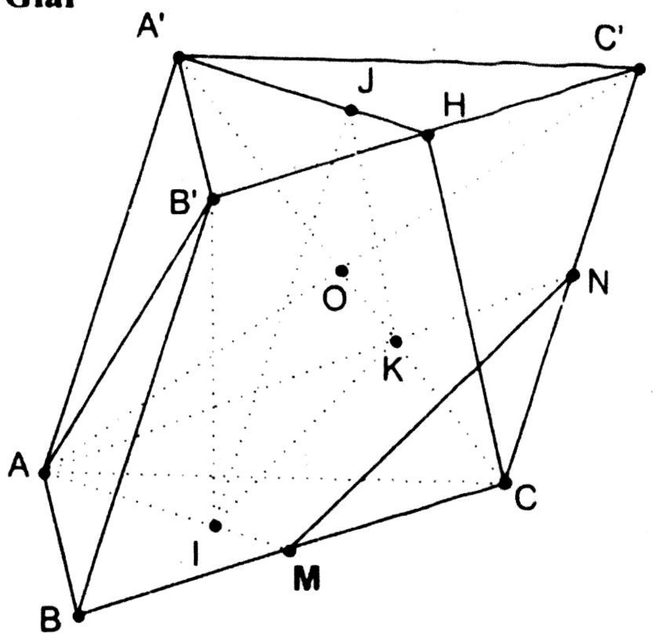
$\Rightarrow$ LH // BD (đpcm)

Bài 4: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi I; J; K lần lượt là trọng tâm của ΔABC; ΔA'B'C'; ΔACC'.Chứng minh rằng:

1. (I JK) // (BB'C'C).
2. (A' JK)// (AIB').

Giải

1. Gọi M;N lần lượt là trung điểm cạnh BC; C'C và O là giao điểm hai đường chéo AC'; A'C.



$\Rightarrow$ K là giao điểm của hai đường thẳng OC và AN

Ta có $\dfrac{AI}{AM} = \dfrac{AK}{AN} = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow$ IK // MN.

Mà MN $\subset$ (BCC'B') (1)

Mặt khác tứ giác AI JA' là hình bình hành nên IJ // AA'

$\Rightarrow$ IJ // BB' (2)

Từ (1) và (2) ta có:(IJK) // (BB'C'C) (đpcm)

2. Gọi H là trung điểm cạnh B'C'

Ta có tứ giác B'HCM là hình bình hành nên B'M // HC (3)

Mà B'M $\subset$ (AI B'); HC $\subset$(A' JK) (4)

Do tứ giác AIJA' là hình bình hành nên AI // A'J (5)

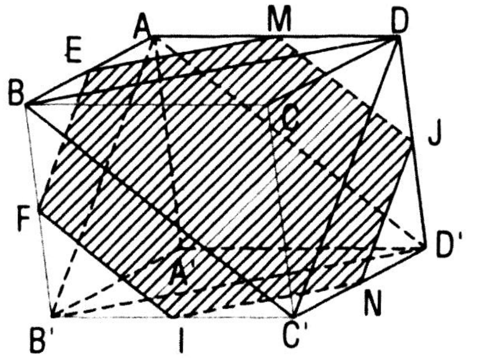
Từ (3); (4) và (5) ta có:(A'JK) // (AIB') (đpcm)

Bài 5: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi M là điểm bất kì thuộc cạnh AD; N là một điểm thuộc cạnh D'C' sao cho $\dfrac{AM}{DM} = \dfrac{D'N}{C'N}$.

1. Chứng minh MN // (C'BD)

2. Xác định thiết diện của hình hộp ABCD.A'B'C'D' cắt bởi mặt phẳng (P) qua MN và song song mặt phẳng (C'BD)

Giải



1. Theo đề ra ta có: $\dfrac{AM}{MD} = \dfrac{D'N}{NC'}$

$\Rightarrow \dfrac{AM}{D'N} = \dfrac{DM}{NC'} = \dfrac{AM + MD}{D'N + NC'} = \dfrac{AD}{D'C'}$ (1)

Theo định lí đảo của định lí Ta-lét, từ (1) MN; DC'; AD' cùng song song với một mặt phẳng (Q)

Mặt khác ta có AD' // BC'

$\Rightarrow$ B C' // (Q)

Vậy DC' // (Q); B C' // (Q)

$\Rightarrow$ (C'BD) // (Q)

Ta có MN không thuộc mặt phẳng (C'BD) và MN // (Q)

Do đó MN // (C'BD)

2. Ta có (P) // (C'BD)

+ (ABCD) $\cap$ (C'BD) = BD; (ABCD)$\cap$ (P) = Mx

$\Rightarrow$ Mx // BD.

Gọi E là giao điểm của Mx và AB

+ (DCC'D')$\cap$ (C'BD) = C'D; (DCC'D')$\cap$(P) = Ny

$\Rightarrow$ Ny // C'D

Gọi J là giao điểm của Ny và DD'

Mặt khác ta có AB'// C'D và BC'// AD' do đó (AB'D') // (C'BD)

$\Rightarrow$ (P) // (AB'D')

+ (ABB'A') $\cap$ (AB'D') = AB'; (ABB'A') $\cap$ (P) = Et

$\Rightarrow$ Et // AB'

Đường thẳng Et cắt BB' tại F

+ (A'B'C'D') $\cap$ (AB'D') = B'D'; (A'B'C'D') $\cap$ (P) = Nm

$\Rightarrow$ Nm // B'D'

Đường thẳng Nm cắt đường thẳng B'C' tại I

Vậy: Thiết diện cần tìm là lục giác MEFINJ

Bài 6: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi P; Q; R; S lần lượt là tâm các mặt bên của ABB'A'; BCC'B'; DCC'D'; DAA'D'.

1. Chứng minh RQ //(ABCD); (PQRS) // (ABCD).

2. Xác định thiết diện của hình hộp ABCD.A'B'C'D' cắt bởi mặt phẳng (AQR)

3. Gọi M là giao điểm của đường thẳng CC' với mặt phẳng (AQR). Hãy tính tỉ số $\frac{MC'}{MC}$

Giải

1. Ta có QR là đường trung bình của tam giác BDC'

$\Rightarrow$ QR // BD

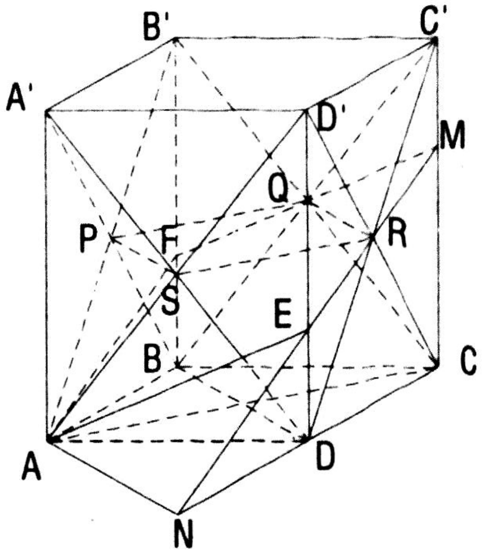
$\Rightarrow$ QR // (ABCD)

Ta có PQ là đường trung bình của tam giác ACB'

$\Rightarrow$ PQ // CA

$\Rightarrow$ PQ // (ABCD)

$\Rightarrow$ (PQRS) // (ABCD)



2. Ta có QR // (ABCD)

Mặt khác mặt phẳng (AQR) cắt mặt phẳng (ABCD) theo giao tuyến qua A; giao tuyến này song song QR cắt CD tại N

$\Rightarrow$ NA // QR

Trong mặt phẳng (DCC'D') đường thẳng NR cắt DD'; CC' lần lượt tại E; M.

Trong mặt phẳng (BB'C'C) đường thẳng QM cắt BB' tại F

Vậy: Thiết diện cần tìm là tứ giác AEMF.

3. Ta có NA // QR $\Rightarrow$ NA // BD

$\Rightarrow$ N là trung điểm đoạn thẳng CN

Mặt khác ta có Δ DER = ΔC'MR

$\Rightarrow$ DE = C'M (1)

Ta có DE // MC nên $\dfrac{DE}{CM} = \dfrac{ND}{NC} = \dfrac{1}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\dfrac{MC'}{MC} = \dfrac{1}{2}$

Bài 7: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Gọi M; N lần lượt là các điểm trên các cạnh AD'; BD sao cho AM = DN = x ($0 < x < a\sqrt{2}$)

1. Chứng minh khi x biến thiên, đường thẳng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

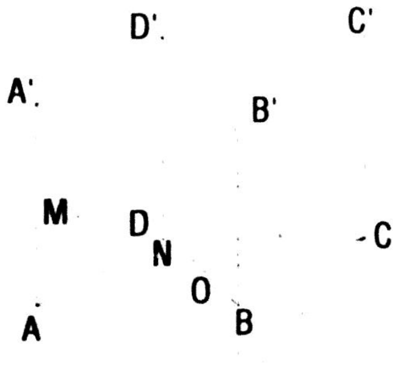
2. Chứng minh rằng khi $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$ thì MN // A'C

Giải

1. ***Cách 1***: Gọi (P) là mặt phẳng qua AD và song song với mặt phẳng (A'D'CB).

Gọi (Q) là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng (A'D'CB)

Giả sử (Q) cắt BD tại N'



Ta có: $\dfrac{AM}{AD'} = \dfrac{DN'}{DB}$ (Định lí Ta-lét) (1)

Mặt khác ta có hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a nên AD' = BD = $a\sqrt{2}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: AM = DN'

Mà AM = DN = x $\Rightarrow$ DN' = DN = x

$\Rightarrow$ N' $\equiv$ N $\Rightarrow$ MN $\subset$ (Q)

Ta có (Q) // (A'D'CB) $\Rightarrow$ MN // (A'D'CB): cố định (đpcm)

Cách 2:

Theo đề ra ta có: $\dfrac{AM}{DN} = \dfrac{MD'}{NB} = \dfrac{AD'}{BD}$

$\Rightarrow$ AD; MN luôn song song với một mặt phẳng (Định lí Ta-lét đảo)

Vậy MN luôn song song mặt phẳng (Q)

Chọn mặt phẳng (Q) trùng với mặt phẳng (A'D'CB) cố định

(Vì AD // BC $\subset$ (A'D'CB))

2. Gọi O là giao điểm của hai đường thẳng CA và BD

Ta có $DN = x = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$ và $OD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow DN = \dfrac{2}{3}DO$

$\Rightarrow$ N là trọng tâm tam giác ACD

Vai trò M; N trong bài toán như nhau nên ta cũng có M là trọng tâm tam giác AA'D

Gọi I là trung điểm cạnh AD ta có C; N; I thẳng hàng và A'; M; I thẳng hàng

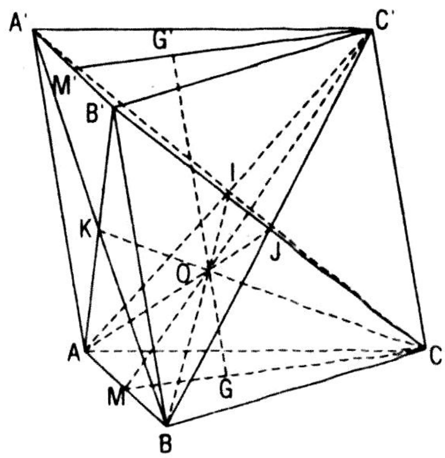
Khi đó $\dfrac{IM}{IA'} = \dfrac{1}{3} = \dfrac{IN}{IC} \Rightarrow MN$ // A'C (đpcm)

Bài 8: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi I; J; K lần lượt là tâm hình bình hành ACC'A'; BCC'B'; ABB'A'.

1. Chứng minh JI // (ABB'A'); JK // (ACC'A'); IK // (BCC'B')

2. Chứng minh (JIK) song song mặt phẳng chứa đáy hình lăng trụ

Giải



1. Ta có JI là đường trung bình của tam giác C'AB

$\Rightarrow$ JI // AB và JI không thuộc mặt phẳng (ABB'A') (Nếu JI thuộc mặt phẳng (ABB'A') thì C; C' thuộc (ABB'A') trái với đề cho ABC.A'B'C' là hình lăng trụ)

$\Rightarrow$ JI // (ABB'A')

Ta có JK // CA $\Rightarrow$ JK // (ACC'A');

IK // BC $\Rightarrow$ IK // (BCC'B')

2. Ta có JI // AB và JK // CA

$\Rightarrow$ (KJI) // (ABC)

Mặt khác ta có (A'B'C')// (ABC)

$\Rightarrow$ (KJI) // (A'B'C')

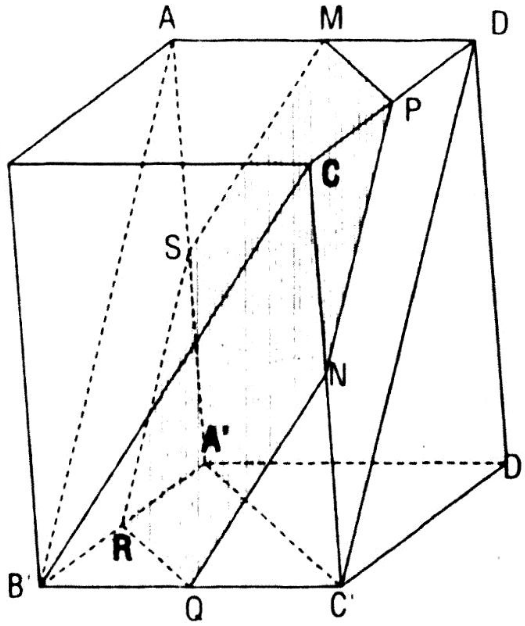
Bài 9: Cho hình hộp ABC.A'B'C'. Gọi M; N là hai điểm lần lượt trên hai cạnh AD; CC' sao cho D'C' sao cho $\dfrac{AM}{DM} = \dfrac{CN}{C'N}$.

1. Chứng minh MN // (ACB').

2. Xác định thiết diện của hình hộp ABCD.A'B'C'D'cắt bởi mặt phẳng (P) qua MN và song song mặt phẳng (ACB').

Giải

1. Dựng đường thẳng qua M và song song đường thẳng AC cắt đường thẳng CD tại P



$\Rightarrow$ MP // AC $\subset$ (ACB')(1)

$\Rightarrow$ MP // (ACB')

$\Rightarrow$ P thuộc mặt phẳng (P)

Ta có $\frac{AM}{DM} = \frac{CP}{DP}$

Mặt khác ta có $\frac{AM}{DM} = \frac{CN}{C'N}$.

$\Rightarrow \frac{CP}{DP} = \frac{CN}{C'N}$. $\Rightarrow$ NP // C'D

Mà AB' // C'D $\Rightarrow$ NP // AB'(2)

Từ (1) và (2) ta có (MNP)// (ACB').

Mà MN $\subset$ (MNP) $\Rightarrow$ MN // (ACB').

2. Ta có P thuộc mặt phẳng (P)

$\Rightarrow$ (P) chính là mặt phẳng qua ba điểm M; N; P

Ta có (ADD'A') // (BCC'B')

Mặt khác ta có (MNP) $\cap$ (ADD'A') = Mt; (MNP) $\cap$ (BCC'B') = Nx

$\Rightarrow$ MT // Nx.

Gọi S là giao điểm của Mt và A'A; Q là giao điểm của B'C' và Nx.

Ta có (ABCD) // (A'B'C'D')

Mặt khác ta có (MNP) $\cap$ (ABCD) = MP; (MNP) $\cap$ (A'B'C'D') = Qy

$\Rightarrow$ Qy // MP $\Rightarrow$ Qy // A'C'.

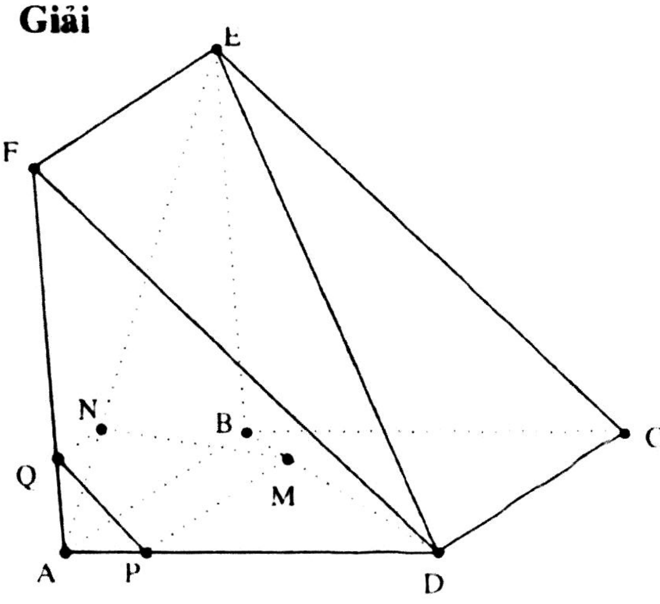
Gọi R là giao điểm của Qy và A'B'.

Vậy thiết diện của hình hộp ABCD.A'B'C'D' cắt bởi mặt phẳng (P) qua MN và song song mặt phẳng (ACB') là lục giác MPNQRS có MP // RQ; RS // NP; MS// NQ.

Bài 10: Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng thuộc một mặt phẳng. Gọi M; N lần lượt là hai điểm thuộc hai cạnh BD; AE sao cho $\frac{BM}{BD} = \frac{AN}{AE}$.

1. Chứng minh rằng: (BCE) // (ADF).
2. Chứng minh rằng: MN // (EDF).

Giải



1. Ta có $BC \,//\, AD \subset (ADF)$

$BE \,//\, AF \subset (ADF)$

$$\Rightarrow \begin{cases} BC \,//\, (ADF) \\ BE \,//\, (ADF) \end{cases}$$

Mặt khác ta có BC; BE cắt nhau nằm trong mặt phẳng (BCE).

$\Rightarrow (BCE) \,//\, (ADF)$ (đpcm)

2. Trong mặt phẳng (ABEF) dựng đường thẳng d qua N và d // EF

Gọi $Q = d \cap AF$

$\Rightarrow NQ \,//\, EF \Rightarrow NQ \,//\, AB$.

Trong mặt phẳng (ABCD) dựng đường thẳng d' qua M và d' // AB

Gọi $P = d' \cap AD$

$\Rightarrow MP \,//\, AB \Rightarrow MP \,//\, NQ \Rightarrow$ M; N; P; Q đồng phẳng

Mặt khác ta có $NQ \,//\, EF \Rightarrow \dfrac{AQ}{AF} = \dfrac{AN}{AE}$ (1)

Ta có $\dfrac{BM}{BD} = \dfrac{AN}{AE}$ (2)

Ta có $MP \,//\, AB \Rightarrow \dfrac{BM}{BD} = \dfrac{AP}{AD}$ (3)

Từ (1); (2); (3) $\Rightarrow \dfrac{AQ}{AF} = \dfrac{AP}{AD}$

$\Rightarrow PQ \,//\, DF \subset (EDF) \Rightarrow PQ \,//\, (EDF)$ (a)

Theo chứng minh trên ta có $NQ \,//\, EF \subset (EDF) \Rightarrow NQ \,//\, (EDF)$ (b)

Từ (a); (b) ta có $(MP, NQ) \,//\, (EDF)$. Mà $MN \subset (MP, NQ)$

$\Rightarrow MN \,//\, (EDF)$ (đpcm)

5. Bài toán 5: Chứng minh ba đường thẳng đồng quy. Chứng minh nhiều điểm đồng phẳng

Phương pháp: Chứng minh ba đường thẳng đồng quy ta có thể dùng một trong các cách sau:

Cách 1: Chứng minh ba đường thẳng đó không đồng phẳng và cắt nhau từng đôi một.

Cách 2:

- Chứng minh hai trong ba đường thẳng trên cắt nhau tại một điểm I

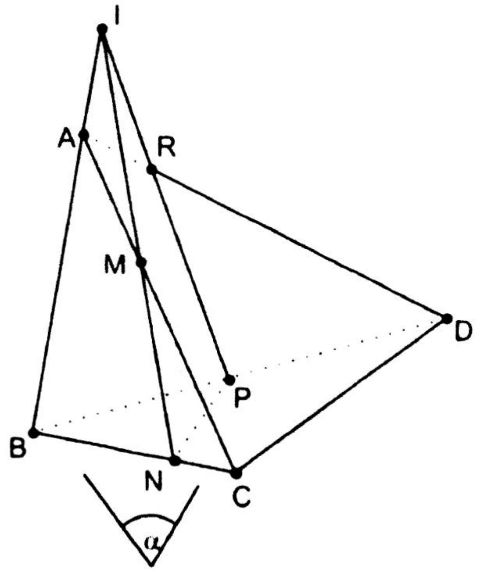
- Chứng minh đường thẳng còn lại đi qua I

(Có thể xét bài toán chứng minh nhiều đường thẳng đồng quy)

Phương pháp: Chứng minh nhiều điểm đồng phẳng bằng cách chứng minh các điểm đó nằm trên hai đường thẳng cắt nhau (Hoặc chứng minh bằng phản chứng)

Ví dụ:

Bài 1: Cho tứ diện ABCD. Một mặt phẳng α không chứa AB cắt các cạnh CB; CA; BD; AD lần lượt tại N; M; P; R. Giả sử bài toán không có sự song song. Chứng minh các đường thẳng MN; AB; PR đồng quy.



Giải

+ Các đường thẳng MN; AB; PR không đồng phẳng

Thật vậy: Nếu MN; AB; PR cùng thuộc một mặt phẳng (Q)

$\Rightarrow$ M; N; A; B; P; Q $\in$ (Q)

Ta có N; B $\in$ (Q) $\Rightarrow$ C $\in$ (Q)

Ta có B; P $\in$ (Q) $\Rightarrow$ D$\in$ (Q)

$\Rightarrow$ A; B; C; D $\in$ (Q) (Trái giả thiết ABCD là tứ diện)

+ Trong mặt phẳng (ABC) hai đường thẳng AB; NM không song song nên cắt nhau tại một điểm.

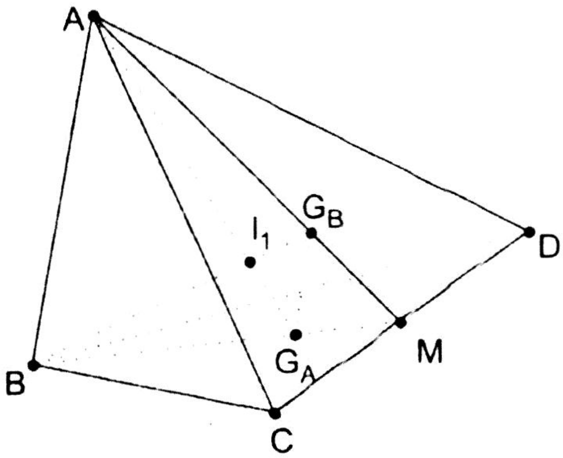
+ Trong mặt phẳng (ABD) hai đường thẳng AB; PR không song song nên cắt nhau tại một điểm

+ Trong mặt phẳng α hai đường thẳng PR; NM không song song nên cắt nhau tại một điểm.

Vậy: Các đường thẳng MN; AB; PR không đồng phẳng và cắt nhau từng đôi một nên chúng đồng quy

Bài 2: Cho một tứ diện. Chứng minh rằng: Các đường thẳng nối mỗi đỉnh với trọng tâm của mặt đối diện đồng quy. (***Điểm chung đó gọi là trọng tâm của tứ diện)***

Giải



Bài toán không mất tính tổng quát giả sử đang xét là tứ diện ABCD

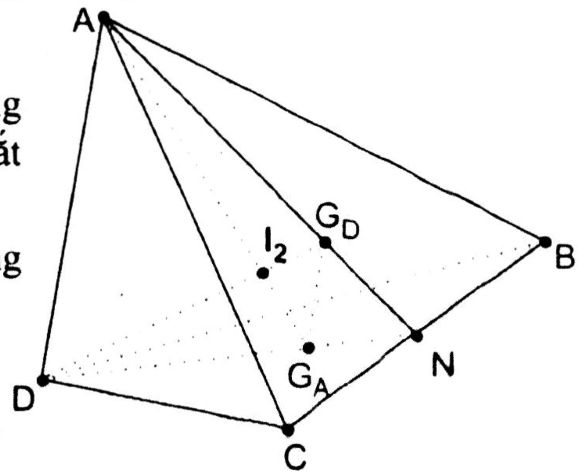
Gọi G_A; G_B; G_C; G_D lần lượt là trọng tâm của tam giác BCD; ACD; ABD; ABC.

Gọi M là trung điểm cạnh CD, ta có:

$$\frac{MG_A}{MB} = \frac{1}{3} = \frac{MG_B}{MA} \Rightarrow G_AG_B \parallel BA.$$

Trong mặt phẳng (ABM), hai đường thẳng cắt AG_A; BG_B nhau tại I_1;

$$\text{Ta có : } \frac{I_1G_A}{I_1A} = \frac{I_1G_B}{I_1B} = \frac{G_AG_B}{AB} = \frac{MG_A}{MB} = \frac{1}{3}$$



Gọi I_2 là giao điểm của AG_A; DG_D

Gọi N là trung điểm cạnh BC, trong mặt phẳng (AND) hai đường thẳng cắt AG_A; DG_D nhau tại I_2

Chứng minh tương tự như trên ta cũng có : $\frac{I_2G_A}{I_2A} = \frac{1}{3} \Rightarrow I_1 \equiv I_2$

Vậy đường thẳng DG_D đi qua giao điểm I_1 của hai đường thẳng AG_A; BG_B

Chứng minh tương tự đường thẳng CG_C đi qua giao điểm I_1 của hai đường thẳng AG_A;BG_B

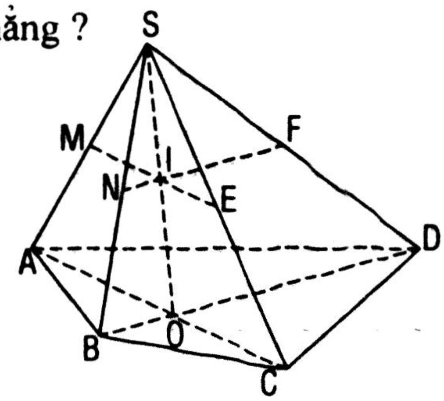
Kết luận: Bốn đường thẳng AG_A; BG_B ; CG_C ; DG_D đồng quy tại I_1.

Bài 3: Cho mmt hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy là một tứ giác lồi. Gọi M; N; E; F lần lượt là trung điểm các cạnh bên SA; SB; CS; SD.

1. Chứng minh ba đường thẳng ME; NF; SO đồng quy (O là giao điểm của hai đường thẳng CA; BD)

2. Chứng minh bốn điểm M; N; E; F đồng phẳng ?

Giải



1. Trong mặt phẳng (SAC); gọi I là giao điểm của hai đường thẳng SO và ME

$\Rightarrow MI \parallel CA$.

Mặt khác ta có M là trung điểm cạnh SA nên I là trung điểm đoạn thẳng SO

Do đó I thuộc đường trung bình NF của tam giác SBD

Vậy ba đường thẳng ME; NF; SO đồng quy tại trung điểm I của đoạn thẳng SO.

2. Ta có bốn điểm M; N; E; F trong đó có hai điểm M; E thuộc đường thẳng a qua I; a song song với đường thẳng CA và hai điểm N; F thuộc đường thẳng b qua I; song song đường thẳng BD.

Vậy: Bốn điểm M; N; E; F cùng thuộc mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng a; b cắt nhau.

Bài 4: Cho n điểm $(n > 3)$

1. Nếu n điểm đó không có 4 điểm nào đồng phẳng, chứng minh rằng không có ba điểm nào trong chúng thẳng hàng.

2. Trong n điểm trên bất kì bốn điểm nào cũng thẳng hàng. Chứng minh rằng: n điểm đó đồng phẳng.

Giải

1. Giả sử có ba điểm A; B; C trong n điểm đó thẳng hàng.

Khi đó lấy bất kì một điểm (chẳng hạn điểm D) trong $n - 3$ điểm còn lại, ta có bốn điểm A; B; C; D đồng phẳng (trái giả thiết)

2. ******Trường hợp 1:* Nếu n điểm cho thẳng hàng thì ta có n điểm đó đồng phẳng (đpcm)

**Trường hợp 2:* Nếu n điểm cho chúng không thẳng hàng thì tồn tại ít nhất ba điểm không thẳng hàng. Chẳng hạn ba điểm không thẳng hàng trong n điểm cho là: A, B, C.

Mặt khác ta có trong n điểm cho bất kì bốn điểm nào cũng thẳng hàng nên mọi điểm của n điểm trên đều thuộc mặt phẳng (ABC). Vậy n điểm cho đồng phẳng (đpcm)

Bài 5: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình chữ nhật. Gọi M; N; E; F lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB; SBC; SCD; SDA. Chứng minh rằng:

1. Bốn điểm M; N; E; F đồng phẳng ?

2. Tứ giác MNEF là một hình thoi .

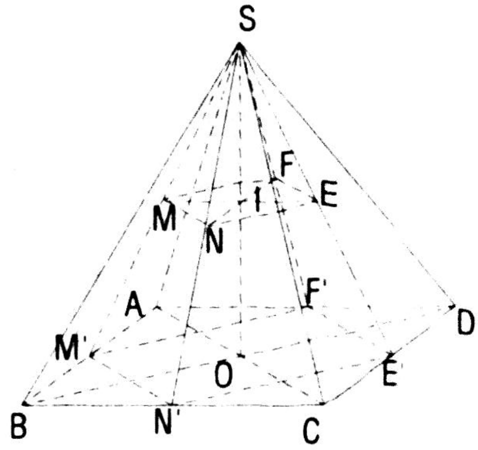
3. Ba đường thẳng ME; NF; SO đồng quy (O là giao điểm của CA và BD)

Giải

1. Gọi M'; N'; E'; F' lần lượt là trung điểm cạnh AB; BC; CD; DA

Ta có $\dfrac{SM}{SM'} = \dfrac{SN}{SN'} = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow MN // M'N'$ và $MN = \frac{2}{3} M'N'$ (a)



Chứng minh tương tự ta có:

$EF // E'F'$ và $EF = \frac{2}{3} E'F'$ (b);

$NE // N'E'$ và $NE = \frac{2}{3} N'E'$;

$MF // M'F'$ và $MF = \frac{2}{3} M'F'$

Mặt khác ta có M'N' là đường trung bình tam giác ABC

$\Rightarrow M'N' // CA$ và $M'N' = \frac{1}{2} CA$ (1)

Ta có E'F' là đường trung bình tam giác DAC

$\Rightarrow E'F' // CA$ và $E'F' = \frac{1}{2} CA$ (2)

$\Rightarrow$ Từ (1) và (2) ta có $M'N' // E'F'$ và $M'N' = E'F' = \frac{1}{2} CA$ (c)

Từ (a); (b); (c) ta có: $MN // EF$

Vậy: Bốn điểm M ; N; E; F đồng phẳng (đpcm)

2. Từ (a); (b); (c) ta có $MN = EF$

Chứng minh tương tự câu 1 ta có: $N'E' = M'F' = \frac{1}{2} BD$

Mặt khác ta có $CA = BD$

Do đó $MN = NE = FE = FM$

Vậy: Tứ giác MNEF là một hình thoi (đpcm)

3. Theo chứng minh trên ta có: $M'N' = N'E' = E'F' = F'M'$

Do đó tứ giác M'N'E'F' là một hình thoi nên O là giao điểm hai đường chéo M'E' và N'F'

Khi đó ta cớ $SO = (M'N'S) \cap (N'F'S)$

Gọi I là giao điểm của ME và NF

$\Rightarrow I \in ME \subset (M'E'S); I \in NF \subset (E'N'S) \Rightarrow I \in SO$

$\Rightarrow$ Đường thẳng SO đi qua I

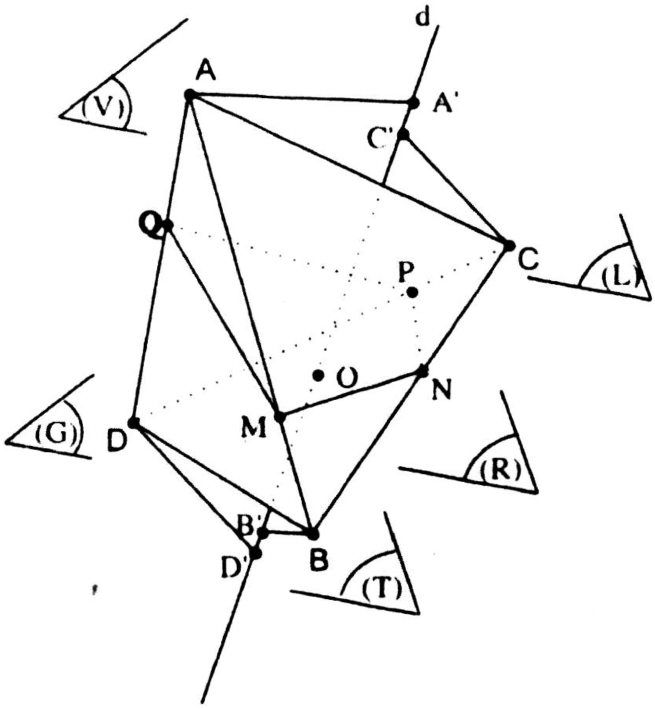
Vậy: Ba đường thẳng ME; NF; SO đồng quy (đpcm)

Bài 6: Cho tứ diện ABCD. Gọi M; N; P; Q lần lượt nằm trên các cạnh AB; BC; CD; DA. Chứng minh rằng: điều kiện cần và đủ để M; N; P; Q đồng phẳng là $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}.\dfrac{\overline{NB}}{\overline{NC}}.\dfrac{\overline{PC}}{\overline{PD}}.\dfrac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = 1$

Giải

* Giả sử bốn điểm M; N; P; Q đồng phẳng, ta chứng minh:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}.\frac{\overline{NB}}{\overline{NC}}.\frac{\overline{PC}}{\overline{PD}}.\frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = 1$$



Gọi (R) là mặt phẳng qua bốn điểm M; N; P; Q

Dựng đường thẳng d bất kì cắt mặt phẳng (R) tại điểm O.

Qua các điểm A; B; C; D lần lượt dựng các mặt phẳng (V); (T); (L); (G) song song với mặt phẳng (R) và cắt đường thẳng d theo thứ tự tại A'; B'; C'; D'.

Theo định lí Ta–lét cho các mặt phẳng (V); (T); (R) trên AB và d ta có:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}$$

Theo định lí Ta – lét cho các mặt phẳng (T); (L); (R) trên BC và d ta có:

$$\frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OC'}}$$

Theo định lí Ta – lét cho các mặt phẳng (L); (R); (G) trên CD và d ta có:

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OD'}}$$

Theo định lí Ta – lét cho các mặt phẳng (R); (V);(G) trên DA và d ta có:

$$\frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = \frac{\overline{OD'}}{\overline{OA'}}$$

Do đó ta có:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}\cdot\frac{\overline{NB}}{\overline{NC}}\cdot\frac{\overline{PC}}{\overline{PD}}\cdot\frac{\overline{QD}}{\overline{QA}}=\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}\cdot\frac{\overline{OB'}}{\overline{OC'}}\cdot\frac{\overline{OC'}}{\overline{OD'}}\cdot\frac{\overline{OD'}}{\overline{OA'}}=1(\text{đpcm})$$

* Giả sử bốn điểm M; N; P; Q lần lượt nằm trên các cạnh AB; BC; CD; DA thỏa mãn:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}\cdot\frac{\overline{NB}}{\overline{NC}}\cdot\frac{\overline{PC}}{\overline{PD}}\cdot\frac{\overline{QD}}{\overline{QA}}=1(a)$$

Ta chứng minh bốn điểm M; N; P; Q đồng phẳng

Gọi Q' là giao điểm của mặt phẳng (MNP) và đường thẳng AD ta có:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}\cdot\frac{\overline{NB}}{\overline{NC}}\cdot\frac{\overline{PC}}{\overline{PD}}\cdot\frac{\overline{Q'D}}{\overline{Q'A}}=1(b)(\text{theo giả thi (a)}).$$

Từ (a) và (b) ta có: $\frac{\overline{QD}}{\overline{QA}}=\frac{\overline{Q'D}}{\overline{Q'A}}$

$\Rightarrow$ Q' $\equiv$ Q

$\Rightarrow$ Bốn điểm M; N; P; Q cùng thuộc mặt phẳng (MNP)

Vậy: bốn điểm M; N; P; Q đồng phẳng (đpcm)

Bài 7: Cho tứ diện ABCD. Gọi M; N; P; Q lần lượt nằm trên các cạnh AB; BC; CD; DA.

1. Chứng minh rằng: nếu $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{PD}}{\overline{PC}}$ và $\frac{\overline{NB}}{\overline{NC}}=\frac{\overline{QA}}{\overline{QD}}$ thì bốn điểm M; N; P; Q đồng phẳng.

2. Gọi O là điểm bất kì. Chứng minh rằng: nếu M; N; P; Q lần lượt là chân đường phân giác trong của các góc đỉnh O của các tam giác OAB; OBC; OCD; ODA thì bốn điểm M; N; P; Q đồng phẳng.

3. Chứng minh rằng: nếu bốn điểm M; N; P; Q đồng phẳng và ba đường thẳng AB; CD; NQ cùng song song với một mặt phẳng thì ba đường thẳng BC; DA; MP cũng cùng song song với một mặt phẳng.

Giải

1. Ta có $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{PD}}{\overline{PC}}$

$\Rightarrow \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}\cdot\frac{\overline{PD}}{\overline{PC}}=1$

$$\frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{QD}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{QA}}{\overline{QD}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{PD}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QA}}{\overline{QD}} = 1$$

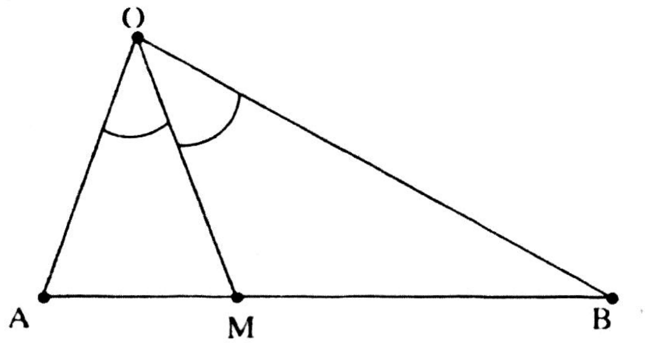
Theo bài 6, từ $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{PD}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QA}}{\overline{QD}} = 1 \Rightarrow$ bốn điểm M; N; P; Q đồng phẳng.

2. Theo tính cùng hướng đường phân giác ta có:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\frac{OA}{OB};\ \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} = -\frac{OB}{OC};$$

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} = -\frac{OC}{OD};\ \frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = -\frac{OD}{OA}.$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \cdot \frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = 1$$



Theo bài 6, từ $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \cdot \frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = 1 \Rightarrow$ bốn điểm M; N; P; Q đồng phẳng.

3. Ta có bốn điểm M; N; P; Q đồng phẳng và ba đường thẳng AB; CD; NQ cùng song song với một mặt phẳng. Ba đường thẳng AB; CD; NQ chắn trên AD và BC những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ:

$$\frac{\overline{QA}}{\overline{QD}} = \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = 1 \quad (1)$$

Mặt khác ta có bốn điểm M; N; P; Q đồng phẳng

$$\Rightarrow \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \cdot \frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = 1 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PC}}$$

$\Rightarrow$ Ba đường thẳng BC; DA; MP cũng cùng song song với một mặt phẳng.

Bài 8: Cho tứ diện ABCD và điểm M nằm trong tam giác BCD. Dựng đường thẳng d qua M song song với hai mặt phẳng (ABC); (ABD). Giả sử đường thẳng d cắt mặt phẳng (ACD) tại B'.

Chứng minh rằng các đường thẳng AB'; BM; CD đồng quy. Chứng minh rằng: $\frac{MB'}{AB} = \frac{S_{\Delta MCD}}{S_{\Delta BCD}}$ (với $S_{\Delta MCD}$ là diện tích của tam giác MCD). Tính tổng $\frac{MB'}{AB} + \frac{MC'}{AC} + \frac{MD'}{AD}$ (với C' là giao điểm của d_1 và mặt phẳng (ABD); D' là giao điểm của d_2 và mặt phẳng (ABC). Biết d_1 là đường thẳng qua M song song với hai mặt phẳng (ACB); (ACD) và đường thẳng d_2 là đường thẳng qua M song song với hai mặt phẳng (ADC); (ADB)).

Giải

* Ta có MB' qua điểm M và song song với hai mặt phẳng (ABC); (ABD).

$\Rightarrow MB' // AB = (ADC) \cap (ADB)$

Gọi (P) là mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng song song MB'; AB.

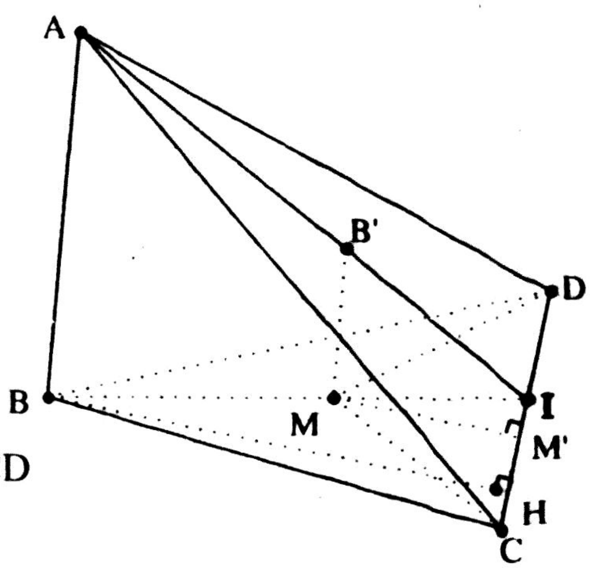
Trong mặt phẳng (P) đường thẳng MB cắt đường thẳng AB' tại điểm I

Vậy ta có $M \in (BCD)$; $I \in MB \subset (BCD)$; $B' \in (ACD)$; $I \in AB' \subset (ACD)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in (BCD) \\ I \in (ACD) \end{cases} \Rightarrow I \in CD = (BCD) \cap (ACD)$$

Do đó các đường thẳng AB'; BM; CD đồng quy tại điểm I (đpcm).

*Ta có $MB' // AB \Rightarrow \frac{MB'}{AB} = \frac{IM}{IB}$.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng CD;

M' là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng CD.

Khi đó $MM' // BH \Rightarrow \frac{IM}{IB} = \frac{MM'}{BH}$.

Mặt khác ta có: $\begin{cases} S_{\Delta MCD} = \frac{1}{2}.MM'.CD \\ S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}.BH.CD \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta MCD}}{S_{\Delta BCD}} = \frac{MM'}{BH} = \frac{IM}{IB} = \frac{MB'}{AB}$$

Vậy $\dfrac{MB'}{AB} = \dfrac{S_{\Delta MCD}}{S_{\Delta BCD}}$ (a) (đpcm)

*Tính tổng $\dfrac{MB'}{AB} + \dfrac{MC'}{AC} + \dfrac{MD'}{AD}$.

Chứng minh tương tự như công thức (a) ta có:

$$\frac{MC'}{AC} = \frac{S_{\Delta MBD}}{S_{\Delta BCD}};\ \frac{MD'}{AD} = \frac{S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta BCD}}$$

$$\Rightarrow \frac{MB'}{AB} + \frac{MC'}{AC} + \frac{MD'}{AD} = \frac{S_{\Delta MCD}}{S_{\Delta BCD}} + \frac{S_{\Delta MBD}}{S_{\Delta BCD}} + \frac{S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta BCD}}$$

$$= \frac{S_{\Delta MCD} + S_{\Delta MBD} + S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta BCD}} = \frac{S_{\Delta BCD}}{S_{\Delta BCD}} = 1$$

Vấn đề III

VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN
QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

A. CẦN NHỚ

I. Vectơ

1. Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng định hướng, đó là một đoạn thẳng đã được chỉ rõ điểm điểm đầu và điểm cuối.

- **Vectơ** có điểm đầu là A và điểm cuối là B, kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$
- Vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau gọi là **vectơ-không,** kí hiệu $\vec{0}$.

Vậy $\overrightarrow{MA} = \vec{0} \Leftrightarrow M \equiv A$.

- Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ khác **vectơ-không** được gọi là giá của vectơ đó.
- Khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ gọi là độ dài của vectơ đó. Kí hiệu độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$

Vậy $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB = BA$ và $\left|\vec{0}\right| = 0$

2. Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.

Hai vectơ có giá cắt nhau được gọi là hai vectơ không cùng phương.

- Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng, hoặc chúng ngược hướng.
- **Vectơ-không** cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ

3. Hai vectơ gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài

Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bằng nhau ta viết $\vec{a} = \vec{b}$.

Vậy $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}, \vec{b} \text{ cùng hướng} \\ \left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| \end{cases}$

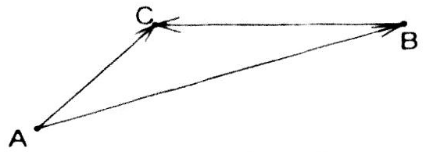
II. Phép cộng vectơ

1. *Định nghĩa*

Cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Trong không gian lấy một điểm A tuỳ ý, dựng $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$; $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

Khi đó $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Kí hiệu $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ (*).



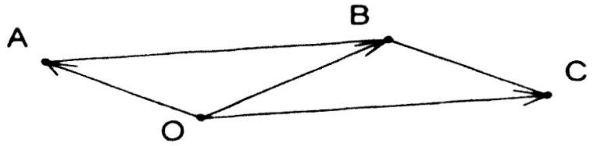
Trong định nghĩa trên có thể lấy điểm A trùng với điểm đầu của vectơ $\vec{a}$

- Phép lấy tổng của hai vectơ được gọi là phép cộng hai vectơ .

***Chú ý**: Các quy tắc

a. Từ (*) ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (**Quy tắc ba điểm**)

b. **Quy tắc hình bình hành:**



Nếu tứ giác OABC là hình bình hành thì ta có: $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$

c. **Quy tắc hình hộp**

Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' với AB, AD; AA' là ba cạnh có chung đỉnh A và AC' là một đường chéo. Ta có: $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$

d. Mở rộng quy tắc ba điểm

Cho n điểm A_1; A_2; A_3;...; A_{n-1}; A_n bất kì, ta có:

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$$

2. *Các tính chất :*

a. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$; $\forall \vec{a}, \vec{b}$ (Tính chất giao hoán)

b. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (Tính chất kết hợp)

c. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

d. $|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$; $\forall \vec{a}, \vec{b}$

III. Phép trừ vectơ:

1. Nếu $\vec{a}+\vec{b} = \vec{0}$ thì ta nói $\vec{a}$ là vectơ đối của $\vec{b}$ hoặc $\vec{b}$ là vectơ đối của $\vec{a}$. Vectơ đối của $\vec{a}$ kí hiệu là $-\vec{a}$.

Vậy hai vectơ đối nhau nếu chúng ngược hướng và cùng độ dài .

Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ đối nhau ta viết $\vec{a} = -\vec{b}$.

Ta có $\vec{a} = -\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}, \vec{b} \text{ ngược hướng} \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| \end{cases}$

2. *Định nghĩa:* Hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a}-\vec{b}$, là tổng của vectơ $\vec{a}$ và vectơ đối của $\vec{b}$.

Vậy $\vec{a}-\vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

- Phép lấy hiệu của hai vectơ gọi là phép trừ vectơ

- Với mọi điểm M; N; O ta luôn có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$.

3. *Tính chất :*

a. Nếu $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$ thì $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$

b. $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| \geq \left|\vec{a}\right| - \left|\vec{b}\right|; \forall\ \vec{a}, \vec{b}$

IV. Phép nhân vectơ với một số:

1. *Định nghĩa*: Cho vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ và số thực $k \neq 0$

Tích của vectơ $\vec{a}$ với số thực k là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$ được xác định như sau:

a. Nếu $k > 0$ thì vectơ $k\vec{a}$ cùng hướng với vectơ $\vec{a}$.

Nếu $k < 0$ thì vectơ $k\vec{a}$ ngược hướng với vectơ $\vec{a}$.

b. $\left|k\vec{a}\right| = |k|.\left|\vec{a}\right|$

- Chú ý: $0\vec{a} = \vec{0}$; $k\vec{0} = \vec{0}$.

- Phép lấy tích của một vectơ với một số gọi là phép nhân vectơ với số (hoặc phép nhân số với vectơ).

- Theo định nghĩa ta có : $1\vec{a} = \vec{a}$; $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$

2. *Tính chất:* Với hai vectơ bất kì $\vec{a}$, $\vec{b}$ và mọi số thực k, l ta có :

a. $k(n\vec{a}) = (kn)\vec{a}$

b. $(k + n)\vec{a} = k\vec{a} + n\vec{a}$

c. $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$; $k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$

d. $k\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \vec{a} = \vec{0} \\ k = 0 \end{array}\right.$

g. Vectơ $\vec{b}$ cùng phương với vectơ $\vec{a}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$) khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{b} = k\vec{a}$

h. $\underbrace{\vec{a} + \vec{a} + \ldots + \vec{a}}_{n \text{ vectơ } \vec{a}} = n\vec{a}$.

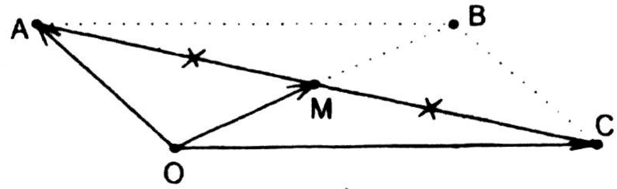
Hệ quả :

a. Vectơ $\vec{b}$ cùng phương với vectơ $\vec{a}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$). Ta có :

$$\vec{b} = \begin{cases} \dfrac{\left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a}; \text{ nếu vectơ } \vec{a}, \vec{b} \text{ cùng hướng} \\ -\dfrac{\left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a}; \text{ nếu vectơ } \vec{a}, \vec{b} \text{ ngược hướng} \end{cases}$$

b. Điều kiện cần và đủ để ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng là có số k sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

c. Các đẳng thức về trung điểm: M là trung điểm đoạn thẳng AC ta có:



+ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

+ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OM}$;

Với mọi điểm O.

Hay $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$

Tổng quát: Điểm M chia đoạn thẳng AC theo tỉ số $k \neq 1$ ($\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MC}$)

Khi đó ta có $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{1-k}(\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OC})$

e. Các đẳng thức về trọng tâm tam giác:

- Nếu G là trọng tâm ΔABC thì ta có:

+ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

+ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ (a), với mọi điểm M.

- Nếu G là trọng tâm tứ diện ABCD thì ta có:

+ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

+ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$ (b), với mọi điểm M.

V. Sự đồng phẳng của ba vectơ

1. Định nghĩa: Trong không gian, ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

2. Tính chất: Cho ba vectơ $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$ và một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$.

- Ba vectơ $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow$ Bốn điểm O; A; B; C cùng thuộc một mặt phẳng.

- Nếu một trong ba vectơ $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$ là vectơ $\vec{0}$ thì ba vectơ $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$ đồng phẳng.

3. Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng

- Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$; $\vec{b}$ và một vectơ $\vec{c}$ trong không gian.

Khi đó ba vectơ $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có cặp số m; n duy nhất sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

******Hệ quả:***

a. $\overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow$ Bốn điểm O; A; B; C cùng thuộc một mặt phẳng.

b. $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow$ Các điểm O; A; B; M; N cùng thuộc một mặt phẳng hoặc đường thẳng MN // mp(OAB)

4. Phân tích một vectơ theo ba vectơ không đồng phẳng

Cho ba vectơ $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$ là ba vectơ không đồng phẳng. Với bất kì một vectơ $\vec{x}$ nào trong không gian đều tìm được một bộ ba số m; n; p duy nhất sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$

VI. Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

1. Góc giữa hai vectơ

Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ trong không gian.

Từ một điểm A bất kì vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Khi đó trong mặt phẳng (ABC) ta có góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, nghĩa là:

$(\vec{a}, \vec{b}) = \widehat{BAC}$.

2. Tích vô hướng

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong không gian là một số được kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$ xác định bởi:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b})$$

Chú ý: Nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $\vec{b} = \vec{0}$ thì $\vec{a}.\vec{b} = 0$.

3. Tính chất

Với ba vectơ $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$ bất kì trong không gian và với mọi số k ta có

a. $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$

b. $\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$

c. $(k\vec{a}).\vec{b} = k(\vec{a}.\vec{b}) = \vec{a}.(k\vec{b})$

d. $\vec{a}.\vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \geq 0$;

$\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$

e. $\vec{a}.(\vec{b}.\vec{c}) \neq (\vec{a}.\vec{b}).\vec{c}$

4. Một số ứng dụng của tích vô hướng

a. Tính độ dài đoạn thẳng $AB = |\overrightarrow{AB}|$

b. Xác định góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ - không:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}.$$

c. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

$AB \perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$

VII. Quan hệ vuông góc trong không gian

1. - Góc giữa hai đường thẳng d_1; d_2 là góc giữa hai đường thẳng d'; d'' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song (hoặc trùng) với d_1; d_2

- Hai đường thẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0.

2. - Một đường thẳng được gọi là vuông góc với mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó

- Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng (P) thì đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P)

- Nếu đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng 90^0.

Nếu đường thẳng d không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa đường thẳng d và hình chiếu vuông góc d'của d trên (P) gọi là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P).

- Phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương d vuông góc với mặt phẳng (P) gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P).

- Cho đường thẳng a có hình chiếu (hình chiếu vuông góc) lên mặt phẳng (P) là đường thẳng a'. Khi đó, một đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (P) vuông góc với a khi và chỉ khi nó vuông góc với a'.

3. - Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

- Hai mặt phẳng gọi là vuông góc nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0.

- Hai mặt phẳng vuông góc nhau khi và chỉ khi một trong chúng chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng còn lại.

- Gọi S là diện tích của đa giác $\mathcal{H}$ nằm trong mặt phẳng (P) và S' là diện tích hình chiếu vuông góc $\mathcal{H}'$ của $\mathcal{H}$ trên mặt phẳng (P') thì $S' = S.\cos\varphi$, trong đó φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P').

- Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc nhau và A là điểm bất kì nằm trong (P) thì đường thẳng a đi qua điểm A và vuông góc với mặt phẳng (Q) sẽ nằm trong (P).

- Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc nhau thì bất cứ đường thẳng a nào thuộc (P), vuông góc với giao tuyến của phẳng (P) và (Q) sẽ vuông góc với mặt phẳng (Q).

- Hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

- Qua đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) có duy nhất mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P).

4. - Khoảng cách từ một điểm M đến mặt phẳng (P) (đến đường thẳng Δ) là khoảng cách giữa hai điểm M và H, trong đó H là hình chiếu (hình chiếu vuông góc) lên mặt phẳng (P) (lên đường thẳng Δ)

- Khoảng cách từ một điểm M đến mặt phẳng (P) kí hiệu là d(M; (P)).

Khoảng cách từ một điểm M đến đường thẳng Δ kí hiệu là d(M; Δ).

- Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P)song song với a là khoảng cách từ một điểm nào đó của a đến mặt phẳng (P)

Vậy $d(M; (P)) = d(A; (P)); \forall A \in a; a \,//\, (P)$

- Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

5. - Đường thẳng c cắt cả hai đường thẳng chéo nhau a, b lần lượt tại I, J đồng thời vuông góc với cả a, b được gọi là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a, b.

Khi đó đoạn thẳng IJ được gọi là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a, b.

6. - Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau.

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó, chứa đường thẳng còn lại.

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

7. - Mặt phẳng đi qua trung điểm đoạn thẳng AB và vuông góc với AB được gọi là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

- Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng là tập hợp các điểm cách đều hai đầu của đoạn thẳng đó.

B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

1. *Bài toán 1:* Chứng minh đẳng thức vectơ; dùng vectơ chứng minh vuông góc; ...

Phương pháp:

+ Chứng minh đẳng thức vectơ ta dùng các đẳng thức về trung điểm; các đẳng thức về trung điểm trọng tâm; quy tắc ba điểm; quy tắc hình bình hành; quy tắc hình hộp; tính chất hình học của hình đã cho; ...

+ Chứng minh $AB \perp CD$ ta thường chứng minh $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$

Ví dụ:

Bài 1: Cho tứ diện ABCD.

1. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$

2. Chứng minh rằng: nếu tứ diện ABCD có hai cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau từng đôi một thì cặp cạnh còn lại vuông góc nhau.

Giải

1. Ta có:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}).\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB})+\overrightarrow{BC}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})$

$=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AB}.\vec{0}=0$ (đpcm)

2. Bài toán không mất tính tổng quát giả sử tứ diện ABCD có: $\begin{cases}AB\perp CD\\AC\perp BD\end{cases}$

Ta chứng minh $BC\perp AD$

Theo chứng minh câu 1 ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=0(1)$; (với mọi tứ diện ABCD).

Mặt khác ta có: $\begin{cases}AB\perp CD\\AC\perp BD\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}\\\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{DB}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\vec{0}\\\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}=\vec{0}\end{cases}(2)$

Từ (1) và (2) ta có $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}\Rightarrow BC\perp AD$

Kết luận: nếu tứ diện ABCD có hai cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau từng đôi một thì cặp cạnh còn lại vuông góc nhau.

Bài 2: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'có tâm I. Chứng minh rằng:

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'}=8\overrightarrow{OI}$; với mọi điểm O

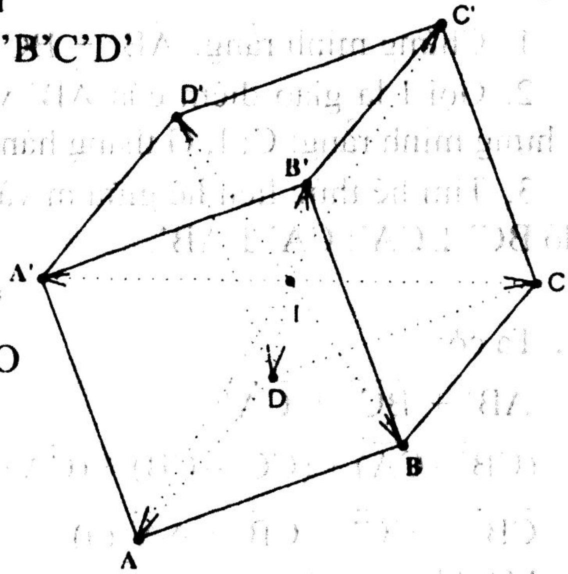
Giải

Ta có I là tâm của hình hộp ABCD.A'B'C'D'

$\Rightarrow$ I là trung điểm mỗi đường chéo AC'; BD'; CA'; DB'.

Do đó ta có:

$\begin{cases}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC'}=2\overrightarrow{OI}\\\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OI}\\\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD'}=2\overrightarrow{OI}\\\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB'}=2\overrightarrow{OI}\end{cases}$; với mọi điểm O



$\Rightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'}=$

$=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC'})+(\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD'})+(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB'})$

$=2\overrightarrow{OI}+2\overrightarrow{OI}+2\overrightarrow{OI}+2\overrightarrow{OI}=8\overrightarrow{OI}$ (đpcm)

Bài 3: Trên đoạn thẳng AB lấy một điểm C tùy ý thỏa mãn: $\frac{CA}{CB} = \frac{k}{h}$.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{SC} = \frac{h}{k+h}\overrightarrow{SA} + \frac{k}{k+h}\overrightarrow{SB}$; $\forall$ S.

Giải

Ta có $\frac{CA}{CB} = \frac{k}{h} \Rightarrow \frac{CA}{CA+CB} = \frac{k}{k+h} \Rightarrow \frac{CA}{AB} = \frac{k}{k+h}$

Mặt khác ta có $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng nên ta có:

$$\overrightarrow{AC} = \frac{CA}{AB}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{k}{k+h}\overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} = \frac{k}{k+h}(\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA});\ \forall S.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{SC} = \frac{k}{k+h}\overrightarrow{SB} - \frac{k}{k+h}\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SA};\ \forall S.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{SC} = (1 - \frac{k}{k+h})\overrightarrow{SA} + \frac{k}{k+h}\overrightarrow{SB};\ \forall S.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{SC} = \frac{h}{k+h}\overrightarrow{SA} + \frac{k}{k+h}\overrightarrow{SB};\ \forall S.$$

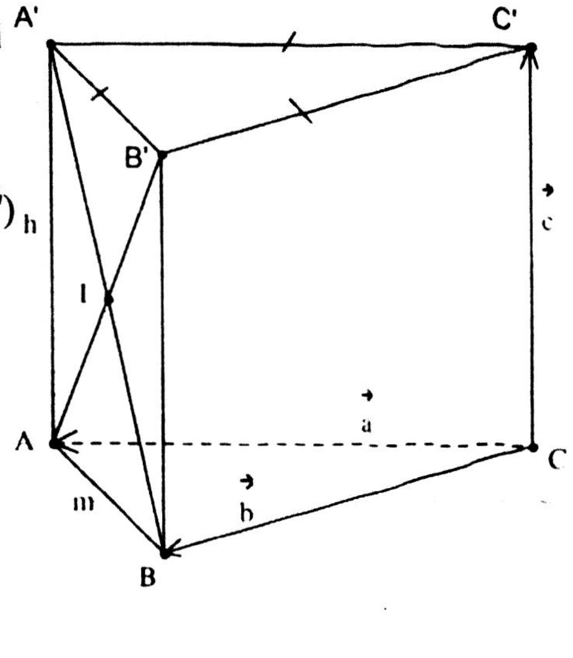
Bài 4: Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có AB = m; AA' = h. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{CC'} = \vec{c}$.

1. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CA'} = 3\vec{c}$.

2. Gọi I là giao điểm của AB' và BA', G là trọng tâm tam giác ABC'. Chứng minh rằng: C; I; G thẳng hàng.

3. Tìm hệ thức liên hệ giữa m và h để AB' ⊥ BC'. Chứng minh rằng khi đó BC' ⊥ CA'; CA' ⊥ AB'.

Giải



1. Ta có:

$\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CA'}$

$= (\overrightarrow{CB'} - \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CC'} - \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA'})$

$= \overrightarrow{CB'} + \overrightarrow{CC'} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AA'}$ (a)

Mặt khác ta có :

$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'} = \vec{c}$;

$\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CC'} = \vec{b} + \vec{c}$ (b)

(Quy tắc hình bình hành)

Từ (a) và (b) ta có:

$$\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CA'} = \vec{b}+\vec{c} + \vec{c} - \vec{b} + \vec{c} = 3\vec{c}.$$

2. Ta có I là giao điểm của AB' và BA'

$\Rightarrow$ I là trung điểm của đoạn thẳng AB'

$\Rightarrow 2\overrightarrow{CI} = (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB'})$

$\Rightarrow \overrightarrow{CI} = \dfrac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}+\vec{c})$ (1)

Ta có G là trọng tâm tam giác ABC'.

$\Rightarrow 3\overrightarrow{CG} = (\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CC'}) = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $3\overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{CI} \Rightarrow \overrightarrow{CG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CI}$.

Do đó hai vectơ $\overrightarrow{CG}$; $\overrightarrow{CI}$ cùng phương nên C; I; G thẳng hàng.

3. Ta có $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{CB'} - \overrightarrow{CA} = (\vec{b}+\vec{c}) - \vec{a} = \vec{b}+\vec{c} - \vec{a}$

$\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{CC'} - \overrightarrow{CB} = \vec{c} - \vec{b}$

Ta có AB' $\perp$ BC' $\Rightarrow \overrightarrow{AB'} \perp \overrightarrow{BC'}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC'} = 0 \Rightarrow (\vec{b}+\vec{c} - \vec{a})(\vec{c} - \vec{b}) = 0$

$\Rightarrow \vec{b}.\vec{c} + |\vec{c}|^2 - \vec{a}.\vec{c} - |\vec{b}|^2 - \vec{c}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{b} = 0$ (3) (vì $\vec{a}.\vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$)

Mặt khác ta có: BC $\perp$ CC'; AC $\perp$ CC'; $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 60^0$

$\Rightarrow \vec{b} \perp \vec{c}$; $\vec{a} \perp \vec{c}$; $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{b}.\vec{c} = 0 \\ \vec{a}.\vec{c} = 0 \\ \vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos 60^0 = AC.BC.\dfrac{1}{2} = \dfrac{m^2}{2} \end{cases} \quad (\text{vì } |\vec{a}| = AC = m; |\vec{b}| = BC = m)\ (4)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$h^2 - m^2 + \frac{m^2}{2} = 0 \Rightarrow h^2 - \frac{m^2}{2} = 0 \Rightarrow h = \frac{m\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy: hệ thức cần tìm là: $h = \dfrac{m\sqrt{2}}{2}$.

Khi đó ta có:

$$\overrightarrow{BC'}.\overrightarrow{CA'} = (\vec{c} - \vec{b}).(\vec{a} + \vec{c}) = \vec{c}.\vec{a} - \vec{b}.\vec{a} + |\vec{c}|^2 - \vec{b}.\vec{c} = -\frac{m^2}{2} + h^2 = 0$$

$\overrightarrow{CA'}.\overrightarrow{AB'} = (\vec{a}+\vec{c}).(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}) = \vec{a}.\vec{b}+\vec{c}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}+|\vec{c}|^2-|\vec{a}|^2-\vec{c}.\vec{a}$

$$= \frac{m^2}{2} - m^2 + h^2 = -\frac{m^2}{2} + h^2 = 0$$

(vì $\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CC'} = \vec{a}+\vec{c}$;

$\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{CB'} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CC'} - \overrightarrow{CA} = \vec{b}+\vec{c}-\vec{a}$)

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BC'}.\overrightarrow{CA'} = 0 \\ \overrightarrow{CA'}.\overrightarrow{AB'} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BC'} \perp \overrightarrow{CA'} \\ \overrightarrow{CA'} \perp \overrightarrow{AB'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BC' \perp CA' \\ CA' \perp AB' \end{cases}$$

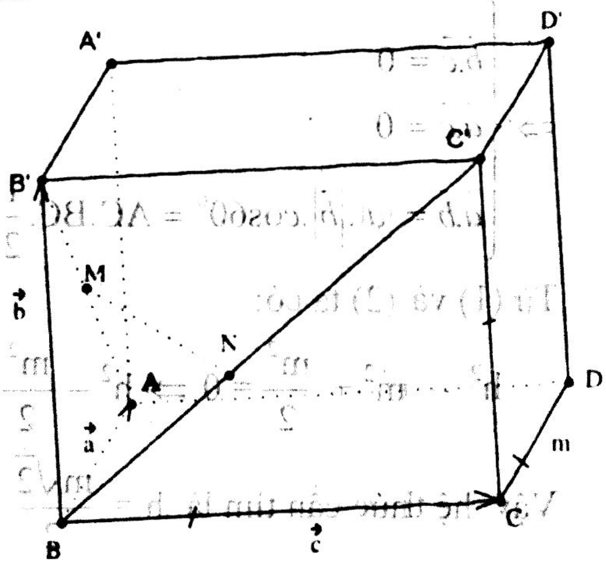
Vậy khi $h^2 - \dfrac{m^2}{2} = 0$ ta có $\begin{cases} BC' \perp CA' \\ CA' \perp AB' \end{cases}$

$\Rightarrow$ Với $h = \dfrac{m\sqrt{2}}{2}$ ta có $\begin{cases} BC' \perp CA' \\ CA' \perp AB' \end{cases}$

Bài 5: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{BB'} = \vec{b}$; $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$. Gọi M là điểm thuộc AB'; N là điểm thuộc BC' sao cho MN $\perp$ AB'; MN $\perp$ BC'

1. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} = \dfrac{2}{3}(\vec{b}+\vec{c}) - \vec{a}$
2. Tính độ dài đoạn thẳng MN theo m (m là cạnh của lập phương ABCD.A'B'C'D')
3. Tính cosin của góc hợp bởi $\overrightarrow{MN}$ và các vectơ $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$.

Giải



1. Ta có N là điểm thuộc BC'

$\Rightarrow \overrightarrow{BN}$; $\overrightarrow{BC'}$ cùng phương

Mặt khác ta có $\overrightarrow{BC'} \neq \vec{0}$ và điểm B không trùng điểm N (tức là $\overrightarrow{BN} \neq \vec{0}$) nên có số thực $k \neq 0$ thỏa mãn:

$\overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{BC'}$

$= k(\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{BC})$

$= k(\vec{b}+\vec{c})$

Ta có M là điểm thuộc AB'

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{AB'}$ cùng phương

Mặt khác ta có $\overrightarrow{AB'} \neq \vec{0}$ và điểm A không trùng điểm M (tức là $\overrightarrow{AM} \neq \vec{0}$) nên có số thực $k' \neq 0$ thỏa mãn:

$\overrightarrow{AM} = k'\overrightarrow{AB'} = k'(\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{BA}) = k'(\vec{b}-\vec{a})$

Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BA}) - \overrightarrow{AM}$

$= k(\vec{b} + \vec{c}) - \vec{a} - k'(\vec{b} - \vec{a}) = (k - k')\vec{b} + k\vec{c} + (k' - 1)\vec{a}$

Mặt khác ta có MN $\perp$ AB'; MN $\perp$ BC'

$$\Rightarrow \begin{cases} MN \perp AB' \\ MN \perp BC' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{BN} \\ \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{AM} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BN} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AM} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BN} = [(k'-1)\vec{a} + (k-k')\vec{b} + k\vec{c}].[k(\vec{b}+\vec{c})] = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AM} = [(k'-1)\vec{a} + (k-k')\vec{b} + k\vec{c}].[k'(\vec{b}-\vec{a})] = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (k'-1)k(\vec{a}.\vec{b}) + (k-k')k\vec{b}.\vec{b} + k^2\vec{c}.\vec{b} \\ \qquad + (k'-1)k(\vec{a}.\vec{c}) + (k-k')k\vec{b}.\vec{c} + k^2\vec{c}.\vec{c} = 0 \\ (k'-1)k'(\vec{a}.\vec{b}) + (k-k')k'\vec{b}.\vec{b} + (kk')\vec{c}.\vec{b} \\ \qquad - (k'-1)k'(\vec{a}.\vec{a}) - (k-k')k'\vec{b}.\vec{a} - (kk')\vec{c}.\vec{a} = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Mặt khác ta có:

$\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{c} = \vec{b}.\vec{c} = 0;\ \vec{b}.\vec{b} = |\vec{b}|^2 = m^2;\ \vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}|^2 = m^2;\ \vec{c}.\vec{c} = |\vec{c}|^2 = m^2.$

Do đó (*) $\Rightarrow \begin{cases} (k-k')k.m^2 + k^2.m^2 = 0 \\ (k-k')k'.m^2 - (k'-1)k'.m^2 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} [(k-k') + k].m^2k = 0 \\ [(k-k') - (k'-1)].m^2k' = 0 \end{cases} \quad (\text{vì } m^2k \neq 0;\ m^2k' \neq 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2k - k' = 0 \\ k - 2k' + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \dfrac{1}{3} \\ k' = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Khi đó ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a}) \\ \overrightarrow{BN} = \dfrac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c}) \\ \overrightarrow{MN} = -\dfrac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) \end{cases}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a}) + \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c}) - \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})$$

$$= \frac{2}{3}(\vec{b} + \vec{c}) - \vec{a} \text{ (đpcm)}$$

2. Ta có $MN^2 = [-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})]^2$

$$= \frac{1}{9}(|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+|\vec{a}|^2) = \frac{1}{9}(m^2+m^2+m^2) = \frac{1}{3}.m^2$$

(vì $\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{c} = \vec{b}.\vec{c} = 0$; $\vec{b}.\vec{b} = |\vec{b}|^2 = m^2$; $\vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}|^2 = m^2$; $\vec{c}.\vec{c} = |\vec{c}|^2 = m^2$)

$$\Rightarrow MN = \frac{m\sqrt{3}}{3}$$

3. Ta có:

$$*\cos(\overrightarrow{MN}, \vec{a}) = \frac{\overrightarrow{MN}.\vec{a}}{MN.|\vec{a}|} = \frac{-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}).\vec{a}}{\frac{m\sqrt{3}}{3}.m} = \frac{-\frac{1}{3}(\vec{a}.\vec{a})}{\frac{\sqrt{3}}{3}.m^2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$*\cos(\overrightarrow{MN}, \vec{b}) = \frac{\overrightarrow{MN}.\vec{b}}{MN.|\vec{b}|} = \frac{-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}).\vec{b}}{\frac{m\sqrt{3}}{3}.m} = \frac{-\frac{1}{3}(\vec{b}.\vec{b})}{\frac{\sqrt{3}}{3}.m^2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$*\cos(\overrightarrow{MN}, \vec{c}) = \frac{\overrightarrow{MN}.\vec{c}}{MN.|\vec{c}|} = \frac{-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}).\vec{c}}{\frac{m\sqrt{3}}{3}.m} = \frac{\frac{1}{3}(\vec{c}.\vec{c})}{\frac{\sqrt{3}}{3}.m^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

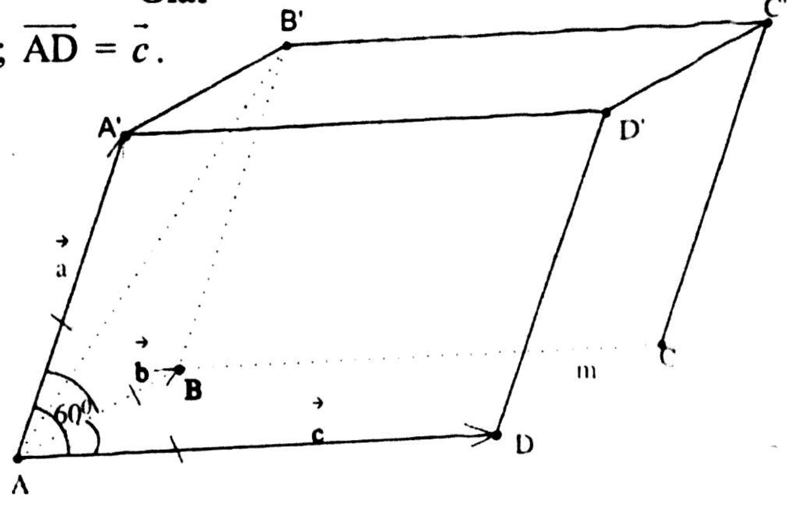
Bài 6: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'có $\widehat{BAD} = \widehat{DAA'} = \widehat{A'AB} = 60^0$ và tất cả các cạnh đều bằng m.

1. Chứng minh rằng: AC' ⊥ BD; AC' ⊥ BA'.
2. Chứng minh rằng: tứ giác BDD'B' là hình vuông.
3. Chứng minh rằng: A'C ⊥ BD; A'C ⊥ DD'.

Giải

1. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$; $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$.

$\Rightarrow \vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = m^2$ và



$$\begin{cases} \vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b}) = m.m.\cos 60^0 = \dfrac{m^2}{2} \\ \vec{a}.\vec{c} = |\vec{a}|.|\vec{c}|.\cos(\vec{a},\vec{c}) = m.m.\cos 60^0 = \dfrac{m^2}{2} \\ \vec{c}.\vec{b} = |\vec{c}|.|\vec{a}|.\cos(\vec{c},\vec{b}) = m.m.\cos 60^0 = \dfrac{m^2}{2} \end{cases}$$

Ta có $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}$ (Quy tắc hình bình hành)

$\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AD} = \vec{c}$.

$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'C'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \vec{c} - \vec{b}$

$\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b}$

Ta có $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{BD} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).(\vec{c} - \vec{b})$

$= \vec{a}.\vec{c} + \vec{c}.\vec{b} + \vec{c}.\vec{c} - \vec{b}.\vec{a} - \vec{b}.\vec{b} - \vec{b}.\vec{c}$

$= \dfrac{m^2}{2} + \dfrac{m^2}{2} + m^2 - \dfrac{m^2}{2} - \dfrac{m^2}{2} - m^2 = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC'} \perp \overrightarrow{BD} \Rightarrow AC' \perp BD$

Ta có $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{BA'} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).(\vec{a} - \vec{b})$

$= \vec{a}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{a} + \vec{c}.\vec{a} - \vec{a}.\vec{b} - \vec{b}.\vec{b} - \vec{c}.\vec{b}$

$= m^2 + \dfrac{m^2}{2} + \dfrac{m^2}{2} - \dfrac{m^2}{2} - m^2 - \dfrac{m^2}{2} = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC'} \perp \overrightarrow{BA'} \Rightarrow AC' \perp BA'$.

2. Ta có BB' // DD' và BB'= DD'= m

$\Rightarrow$ Tứ giác BDD'B' là hình bình hành

Mặt khác ta có:

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2.AB.AD.\cos 60^0$

$= m^2 + m^2 - 2.m.m.\dfrac{1}{2} = m^2$

$\Rightarrow$ BD = m $\Rightarrow$ Tứ giác BDD'B' là hình thoi (a)

Mặt khác ta có $\overrightarrow{BD} = \vec{c} - \vec{b}$; $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AA'} = \vec{a}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{DD'} = (\vec{c} - \vec{b}).\vec{a} = \vec{c}.\vec{a} - \vec{b}.\vec{a} = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{DD'} \Rightarrow BD \perp DD'$(b)

Từ (a) và (b) $\Rightarrow$ Tứ giác BDD'B' là hình vuông(đpcm).

3. Ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{b} + \vec{c}$ (Quy tắc hình bình hành)

$$\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AA'} = \vec{b} + \vec{c} - \vec{a}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{BD} = (\vec{b} + \vec{c} - \vec{a}).(\vec{c} - \vec{b})$$

$$= \vec{b}.\vec{c} + \vec{c}.\vec{c} - \vec{a}.\vec{c} - \vec{b}.\vec{b} - \vec{c}\,\vec{b} + \vec{a}.\vec{b}$$

$$= \frac{m^2}{2} + m^2 - \frac{m^2}{2} - m^2 - \frac{m^2}{2} + \frac{m^2}{2} = 0.$$

$\Rightarrow \overrightarrow{A'C} \perp \overrightarrow{BD} \Rightarrow$ A'C $\perp$ BD.

Ta có $\overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{DD'} = (\vec{b} + \vec{c} - \vec{a}).\vec{a} = \vec{b}.\vec{a} + \vec{c}.\vec{a} - \vec{a}.\vec{a}$

$$= \frac{m^2}{2} + \frac{m^2}{2} - m^2 = 0.$$

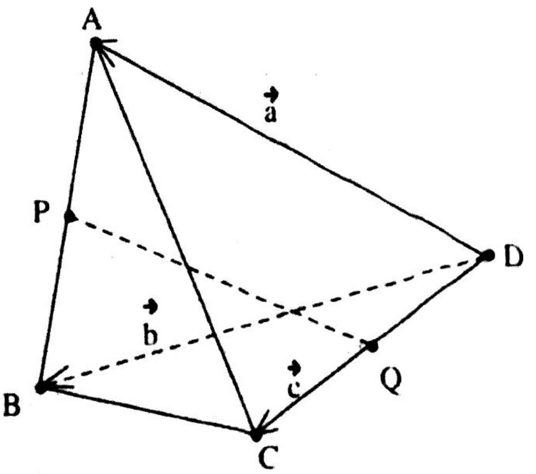
$\Rightarrow \overrightarrow{A'C} \perp \overrightarrow{DD'}$

$\Rightarrow$ A'C $\perp$ DD'.

Bài 7: Cho tứ diện ABCD có AC = BD; BC = AD.

Chứng minh rằng: nếu P; Q lần lượt là trung điểm của cạnh AB; CD thì PQ $\perp$ AB; PQ $\perp$ CD.

Giải



Đặt $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$

Ta có $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{DQ} - \overrightarrow{DP}$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB})$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}).$$

Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA} = \vec{b} - \vec{a}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}).(\vec{b} - \vec{a})$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{c}.\vec{b} - \vec{a}.\vec{b} - \vec{b}.\vec{b} - \vec{c}.\vec{a} + \vec{a}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{a})$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{c}.\vec{b} - |\vec{b}|^2 - \vec{c}.\vec{a} + |\vec{a}|^2)\ (1)$$

Mặt khác ta có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB} = \vec{c} - \vec{b}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} = \vec{c} - \vec{a}$

BC = AD $\Rightarrow \overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AD}^2$

$$\Rightarrow (\vec{c} - \vec{b}).(\vec{c} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{c}|^2 - 2\vec{b}.\vec{c} + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2$$

$AC = BD \Rightarrow \overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{DB}^2$

$\Rightarrow (\vec{c} - \vec{a}).(\vec{c} - \vec{a}) = |\vec{b}|^2 \Rightarrow |\vec{c}|^2 - 2\vec{a}.\vec{c} + |\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2$

Do đó ta có $-2\vec{b}.\vec{c} + 2\vec{a}.\vec{c} + |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$

$\Rightarrow \vec{c}.\vec{b} - |\vec{b}|^2 - \vec{c}.\vec{a} + |\vec{a}|^2 = 0$ (2)

Thay (2) vào (1) ta được: $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{AB} = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow PQ \perp AB$

Chứng minh tương tự ta có $PQ \perp CD$

2. Bài toán2: **Chứng minh ba vectơ đồng phẳng, nhiều điểm cùng nằm trên một mặt phẳng và đường thẳng song song mặt phẳng cố định; ...**

***Phương pháp*:** Dùng tính chất:

+ Cho ba vectơ $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$ và một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Khi đó:

Ba vectơ $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow$ Bốn điểm O; A; B; C cùng thuộc một mặt phẳng.

+ Nếu một trong ba vectơ $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$ là vectơ $\vec{0}$ thì ba vectơ $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$ đồng phẳng.

+ Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$; $\vec{b}$ và một vectơ $\vec{c}$ trong không gian. Khi đó ba vectơ $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có cặp số m; n duy nhất sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

****Hệ quả:***

a. $\overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow$ Bốn điểm O; A; B; C cùng thuộc một mặt phẳng.

b. $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow$ Các điểm O; A; B; M; N cùng thuộc một mặt phẳng hoặc đường thẳng MN // mp(OAB)

Ví dụ:

Bài 1: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Trên các đoạn thẳng BD và AD' lần lượt lấy hai điểm thay đổi M và N sao cho DM = AN = x ($0 \le x \le a\sqrt{2}$). Chứng minh rằng: Các vectơ $\overrightarrow{MN}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BA'}$ đồng phẳng.

Giải

Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AN}$ (1)

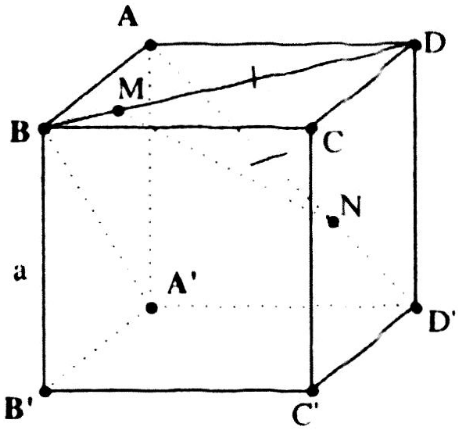
$BD = AD' = a\sqrt{2}$ và $DM = AN = x$, $0 \le x \le a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \frac{DM}{BD} = \frac{AN}{AD'} = \frac{x}{a\sqrt{2}}, 0 \le \frac{DM}{BD} = \frac{AN}{AD'} \le 1$$

Mặt khác ta có:

$$\overrightarrow{MD} = \frac{DM}{BD}\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AN} = \frac{AN}{AD'}\overrightarrow{AD'}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MD} = \frac{x}{a\sqrt{2}}\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AN} = \frac{x}{a\sqrt{2}}\overrightarrow{AD'}(2)$$



Từ (1) và (2) suy ra:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{x}{a\sqrt{2}}\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AD} + \frac{x}{a\sqrt{2}}\overrightarrow{AD'}$$

$$= \frac{x}{a\sqrt{2}}(\overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{BD}) - \overrightarrow{AD}$$

$$= \frac{x}{a\sqrt{2}}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{AD}$$

$$= \frac{x}{a\sqrt{2}}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{AD} \text{ (vì } \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AA'})$$

$$= \frac{x}{a\sqrt{2}}(2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{AD}$$

$$= (\frac{x\sqrt{2}}{a} - 1)\overrightarrow{AD} + \frac{x}{a\sqrt{2}}\overrightarrow{BA'}$$

Vậy $\overrightarrow{MN} = (\frac{x\sqrt{2}}{a} - 1)\overrightarrow{AD} + \frac{x}{a\sqrt{2}}\overrightarrow{BA'}$.(3)

Mặt khác ta có $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BA'}$ không cùng phương(4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \overrightarrow{MD}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BA'}$ đồng phẳng (đpcm).

Bài 2: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi I; J lần lượt là trung điểm của cạnh BB' và A'C'; gọi K là điểm thuộc B'C' sao cho $\overrightarrow{KC'} = -2\overrightarrow{KB'}$. Chứng minh rằng: Bốn điểm A; I; J; K cùng thuộc một mặt phẳng.

Giải

Ta có I; J lần lượt là trung điểm của cạnh BB' và A'C'

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB'}); \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'}).$$

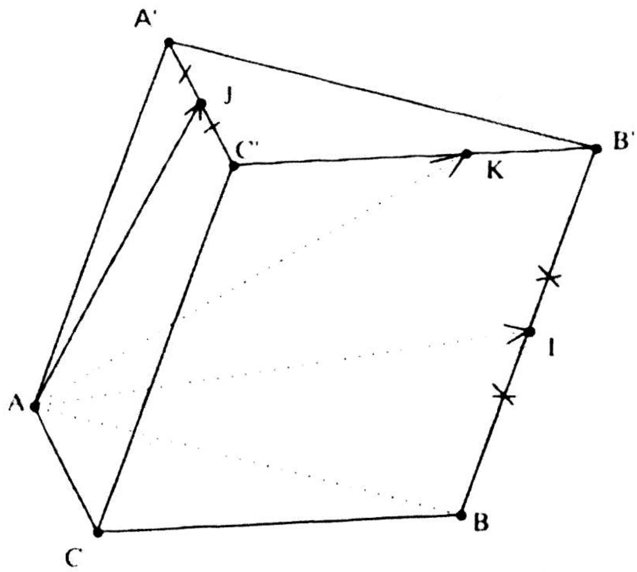
Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$; $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$

Ta có $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \vec{b} + \vec{a}$ (vì $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$)

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{c}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(2\vec{b} + \vec{a}) = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$$

và $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(2\vec{a} + \vec{c}) = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$.



Ta có $\overrightarrow{KC'} = -2\overrightarrow{KB'}$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{KC'}\right| = 2\left|\overrightarrow{KB'}\right| \Rightarrow KC' = 2KB$$

$$\Rightarrow \frac{KB'}{KC'} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{KB'}{KC' + KB'} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{KB'}{B'C'} = \frac{1}{3}$$

Ta có: $\overrightarrow{B'C'}$ và $\overrightarrow{B'K}$ cùng hướng

$$\Rightarrow \overrightarrow{B'K} = \frac{KB'}{B'C'}\overrightarrow{B'C'} \Rightarrow \overrightarrow{B'K} = \frac{1}{3}\overrightarrow{B'C'}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AB'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB'})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC'} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{c}) + \frac{2}{3}(\vec{b} + \vec{a}) = \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{2}{3}\vec{b} + \vec{a}$$

Vậy ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} \\ \overrightarrow{AJ} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} \\ \overrightarrow{AK} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} \\ \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c} \\ \overrightarrow{AK} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} \end{cases}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$$

Mặt khác ta có $\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{AJ}$ không cùng phương nên $\overrightarrow{AK}$; $\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{AJ}$ đồng phẳng. Do đó bốn điểm A; I; J; K cùng thuộc một mặt phẳng.

Bài 3: Cho tứ diện ABCD. Gọi I; J lần lượt là trung điểm của các cạnh AB; CD. Gọi M là điểm thuộc AC sao cho $\overrightarrow{MA} = k_1\overrightarrow{MC}\ (k_1 \neq 1)$. Gọi N là điểm thuộc BD sao cho $\overrightarrow{NB} = k_2\overrightarrow{ND}\ (k_2 \neq 1)$. Chứng minh rằng: Các điểm I; J; M; N cùng thuộc một mặt phẳng khi và chỉ khi $k_1 = k_2$.

Giải

Ta có $\overrightarrow{MA} = k_1\overrightarrow{MC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IM} = k_1(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IM})$

$\Rightarrow (1 - k_1)\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IA} - k_1\overrightarrow{IC}$

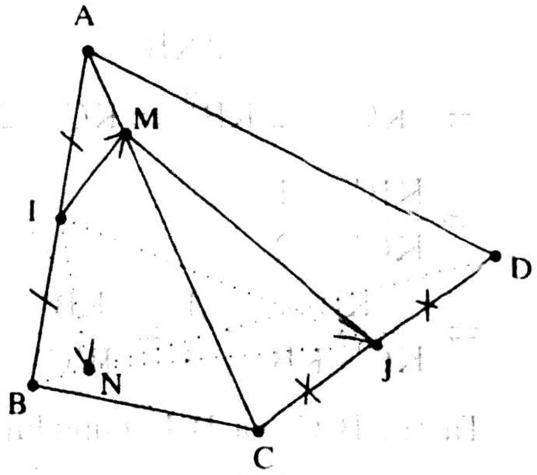
$\Rightarrow \overrightarrow{IM} = \dfrac{1}{1-k_1}(\overrightarrow{IA} - k_1\overrightarrow{IC})$

(vì $k_1 \neq 1$ nên $1 - k_1 \neq 0$).

Tương tự, ta có $\overrightarrow{NB} = k_2\overrightarrow{ND}$ ($k_2 \neq 1$).

$\Rightarrow \overrightarrow{IN} = \dfrac{1}{1-k_2}(\overrightarrow{IB} - k_2\overrightarrow{ID})$

$\Rightarrow \overrightarrow{IN} = \dfrac{1}{1-k_2}(-\overrightarrow{IA} - k_2\overrightarrow{ID})$



Mặt khác ta có $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID})$

Các điểm I; J; M; N cùng thuộc một mặt phẳng khi và chỉ khi $\overrightarrow{IM}$; $\overrightarrow{IN}$; $\overrightarrow{IJ}$ đồng phẳng

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM} = m\overrightarrow{IJ} + n\overrightarrow{IN}$ (vì $\overrightarrow{IM}$; $\overrightarrow{IN}$ không cùng phương).

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{1-k_1}(\overrightarrow{IA} - k_1\overrightarrow{IC}) = m\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}) + n\dfrac{1}{1-k_2}(-\overrightarrow{IA} - k_2\overrightarrow{ID})$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{nk_2}{1-k_2} - \dfrac{m}{2}\right)\overrightarrow{ID} + \left(-\dfrac{m}{2} - \dfrac{k_1}{1-k_1}\right)\overrightarrow{IC} + \left(\dfrac{1}{1-k_1} + \dfrac{n}{1-k_2}\right)\overrightarrow{IA} = \vec{0}$ (*)

Mặt khác ta có $\overrightarrow{ID}$; $\overrightarrow{IC}$; $\overrightarrow{IA}$ không đồng phẳng nên

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{nk_2}{1-k_2} - \dfrac{m}{2} = 0 \\ -\dfrac{m}{2} - \dfrac{k_1}{1-k_1} = 0 \\ \dfrac{1}{1-k_1} + \dfrac{n}{1-k_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{nk_2}{1-k_2} = \dfrac{m}{2} \\ -\dfrac{k_1}{1-k_1} = \dfrac{m}{2} \\ -\dfrac{1}{1-k_1} = \dfrac{n}{1-k_2} \end{cases}$$

Do đó ta có $\dfrac{k_1}{1-k_1} = -\dfrac{nk_2}{1-k_2} = \dfrac{k_2}{1-k_1}$

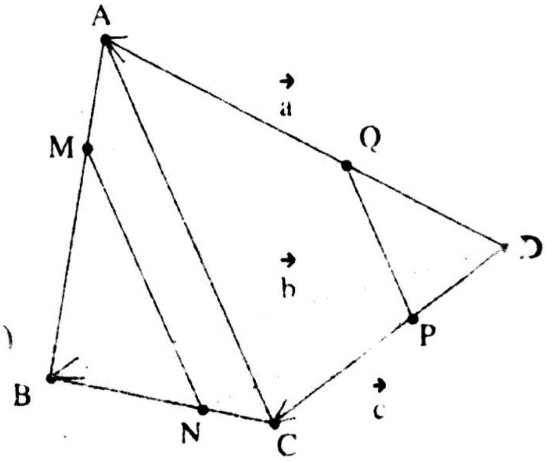
Vậy ta có $\dfrac{k_1}{1-k_1} = \dfrac{k_2}{1-k_1} \Leftrightarrow k_1 = k_2$

Bài 4: Cho tứ diện ABCD. Gọi M; N; P; Q lần lượt thuộc AB; BC; CD; DA sao cho: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{DP} = k\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. Xác định k để bốn điểm M; N; P; Q cùng thuộc một mặt phẳng.

Giải

Đặt $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$

Ta có:



$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$$

$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$

$$= \frac{2}{3}(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}) + \frac{2}{3}(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB})$$

$$= \frac{2}{3}\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{a}$$

Ta có $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{DA}) \Rightarrow \overrightarrow{AQ} = -\frac{1}{2}\vec{a}$.

Ta có:

$$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{3}(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}) = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MQ} = -\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$$

Ta có $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MP} = -\overrightarrow{DA} + k\overrightarrow{DC} - \frac{1}{3}(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MP} = -\vec{a} + k\vec{c} - \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a}) \Rightarrow \overrightarrow{MP} = -\frac{2}{3}\vec{a} + k\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{b}$$

Vậy ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{MN} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c} \\ \overrightarrow{MQ} = -\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} \\ \overrightarrow{MP} = -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + k\vec{c} \end{cases}$

Các điểm M; N; P; Q cùng thuộc một mặt phẳng khi và chỉ khi $\overrightarrow{MP}$; $\overrightarrow{MN}$; $\overrightarrow{MQ}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có số m; n sao cho: $\overrightarrow{MP} = m\overrightarrow{MN} + n\overrightarrow{MQ}$

(vì $\overrightarrow{MN}$; $\overrightarrow{MQ}$ không cùng phương)

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}\vec{a} + k\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{b} = m\left(\frac{2}{3}\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{a}\right) + n\left(-\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2m}{3} + \frac{n}{6} - \frac{2}{3}\right)\vec{a} + \left(\frac{n}{3} - \frac{1}{3}\right)\vec{b} + \left(k - \frac{2m}{3}\right)\vec{c} = \vec{0}\ (*)$$

Mặt khác ta có $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$ không đồng phẳng.

Do đó (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2m}{3} + \dfrac{n}{6} - \dfrac{2}{3} = 0 \\ \dfrac{n}{3} - \dfrac{1}{3} = 0 \\ k - \dfrac{2m}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{3}{4} \\ n = 1 \\ k = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Vậy giá trị cần tìm của k là $k = \frac{1}{2}$

3. Bài toán 3: Chứng minh hai đường thẳng vuông góc.

Phương pháp: Để chứng minh hai đường thẳng a; b vuông góc với nhau, ta có thể dùng một trong các phương pháp sau:

Phương pháp 1: Chứng minh góc giữa hai đường thẳng a, b bằng 90^0.

Phương pháp 2: Dùng các định lí trong hình học phẳng: định lí đảo của định lí Pi- ta-go; góc nội tiếp nửa đường tròn; đường trung tuyến của tam giác cân (nối đỉnh và trung điểm của cạnh đáy); …

Phương pháp 3: Chứng minh đường thẳng này vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng kia.

Phương pháp 4: Dùng định lí ba đường vuông góc.

4. Bài toán 4: Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.

Phương pháp: Để chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P), ta có thể dùng một trong các phương pháp sau:

Phương pháp 1: Chứng minh đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng (P).

Phương pháp 2: Chứng minh đường thẳng a song song với đường thẳng b vuông góc với mặt phẳng (P).

Phương pháp 3: Chứng minh đường thẳng $a \subset (Q)$ mà $(Q) \perp (P)$; $a \perp d = (Q) \cap (P)$

Phương pháp 4: Chứng minh đường thẳng a là giao tuyến của hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với mặt phẳng (P).

5. Bài toán 5: Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc với nhau

Phương pháp: Để chứng minh hai mặt phẳng vuông góc với nhau, ta chứng minh mặt phẳng này chứa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

Ví dụ: (Bài toán 3; bài toán 4; bài toán 5).

Bài 1: Cho tứ diện ABCD. Gọi M; N lần lượt là trung điểm cạnh BC; AD.

Biết $MN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; AB = CD = a. Chứng minh rằng: $AB \perp CD$.

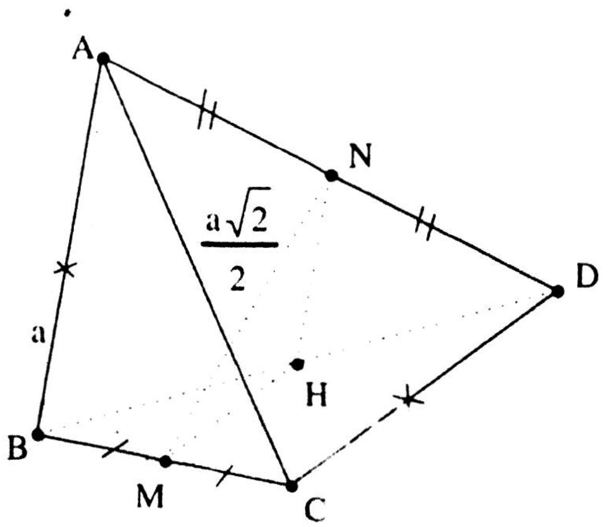
Giải

Từ M dựng đường thẳng d song song CD.

Gọi $H = d \cap BD$

$\Rightarrow$ H là trung điểm cạnh BD

$\Rightarrow MH = NH = \dfrac{a}{2}$.



Ta có:

$$\cos\widehat{MHN} = \frac{MH^2 + NH^2 - MN^2}{2MH.NH}$$

$$= \frac{2(\frac{a}{2})^2 - (\frac{a\sqrt{2}}{2})^2}{2(\frac{a}{2})^2} = 0$$

$\Rightarrow \widehat{MHN} = 90^0$.

Ta có NH // AB; MH // CD nên góc giữa hai đường thẳng MH; NH là góc giữa AB; CD

Mà $\widehat{MHN} = 90^0 \Rightarrow AB \perp CD$ (đpcm).

Bài 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông; $SA \perp (ABCD)$. Gọi H; K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB; SD.

1. Chứng minh rằng: các mặt bên của hình chóp S.ABCD là các tam giác vuông.
2. Chứng minh rằng: AH; KA cùng vuông góc đường thẳng CS.
3. Gọi $I = SC \cap (AHK)$. Chứng minh rằng: $HK \perp AI$; $CS \perp AI$.

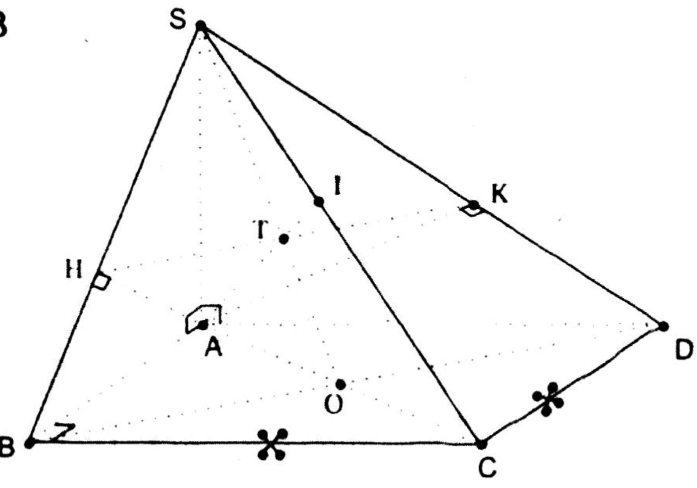
Giải

1. Ta có $SA \perp (ABCD)$

$$\Rightarrow \begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp AD \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta SAB$; ΔSAD là các tam giác vuông tại A.

Ta có $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp SB$
(Định lí ba đường vuông góc)
$\Rightarrow \Delta SBC$ vuông tại B.
Ta có $CD \perp AD \Rightarrow CD \perp SD$
(Định lí ba đường vuông góc)
$\Rightarrow \Delta SCD$ vuông tại D
Vậy các mặt bên của hình chóp S.ABCD là các tam giác vuông (đpcm).



2.

Ta có $SA \perp (ABCD)$; $BC \subset (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$ (1)
Mặt khác ta có $AB \perp BC$ (2)
Từ (1) và (2) $\Rightarrow BC \perp (SAB)$. Mà $AH \subset (SAB)$
$\Rightarrow BC \perp AH$ (3)
Theo đề ra ta có $SB \perp AH$ (4)
Từ (3 và (4) $\Rightarrow AH \perp (SBC)$. Mà $CS \subset (SBC)$.
$\Rightarrow AH \perp CS$.
Ta có $SA \perp (ABCD)$. Mà $CD \subset (ABCD) \Rightarrow SA \perp CD$
Mặt khác ta có $AD \perp CD$
Do đó ta có $CD \perp (SAD)$. Mà $KA \subset (SAD) \Rightarrow CD \perp KA$ (a)
Mặt khác ta có $SD \perp KA$ (b)
Từ (a) và (b) $\Rightarrow KA \perp (SCD)$
Mà $CS \subset (SCD) \Rightarrow AK \perp CS$ (đpcm).

3. Ta có $\Delta SAB = \Delta SAD \Rightarrow \widehat{ASH} = \widehat{ASK}$ và $SB = SD$
$\Rightarrow \Delta SHA = \Delta SKA \Rightarrow SH = SK$
$\Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{SK}{SB} \Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{SK}{SD}$ (vì $\Delta SAB = \Delta SAD \Rightarrow SB = SD$)
$\Rightarrow HK // BD$ (c)
Mặt khác ta có $BD \perp AC$; $BD \perp SA$ nên $BD \perp (SAC)$ (*)
Ta có $I = SC \cap (AHK)$
$\Rightarrow I \in (SAC)$. $\Rightarrow AI \subset (SAC)$
Do đó từ (*) $\Rightarrow BD \perp AI$ (d)
Từ (c) và (d) $\Rightarrow HK \perp AI$.
Gọi O là giao điểm của AC và BD; T là giao điểm của hai đường thẳng HK; SO
$\Rightarrow I = SC \cap AT \Rightarrow AI \subset (AHK)$

Mặt khác ta có $\begin{cases} SC \perp AH \\ SC \perp AK \end{cases}$

$\Rightarrow SC \perp (AHK)$. Mà $AI \subset (AHK)$

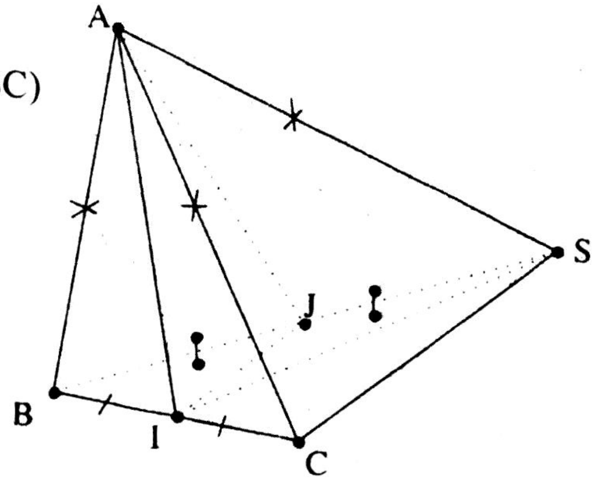
$\Rightarrow SC \perp AI$

Bài 3: Cho tứ diện SABC có $AB = AC = AS$ và mặt phẳng $(ABC) \perp (SBC)$. Chứng minh rằng: $SC \perp SB$.

Giải

Gọi I là trung điểm cạnh BC

$\Rightarrow BC \perp AI$(vì tam giác ABC cân tại A)



Mặt khác ta có $\begin{cases} (ABC) \perp (SBC) \\ BC = (ABC) \cap (SBC) \\ AI \subset (ABC) \end{cases}$

$\Rightarrow AI \perp (SBC) \Rightarrow AI \perp SB(1)$

Gọi J là trung điểm của cạnh SB.

$\Rightarrow AJ \perp SB$ (2) (vì tam giác ABS cân tại A) và $JI // CS$ (3).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SB \perp (AIJ)$

Cách 1:

Ta có $SB \perp (AIJ) \Rightarrow SB \perp JI$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow SB \perp SC$(đpcm).

Cách 2:

Ta có $SB \perp (AIJ)$(5).

Mặt khác ta có $JI // CS \Rightarrow CS // (AIJ)$ (6).

Từ (5) và (6) $\Rightarrow SB \perp CS$ (đpcm)

Cách 3:

Ta có $\begin{cases} AI \perp (SBC) \\ BI = CI \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AI \perp SI \subset (SBC) \\ BI = CI \end{cases}$

Vậy ΔABI; ΔASI là các tam giác vuông tại I và AB =AS; AI là cạnh chung

$\Rightarrow \Delta ABI = \Delta ASI \Rightarrow BI = SI$

Do đó ta có $BI = SI = CI$

$\Rightarrow \Delta SBC$ vuông góc tại $S \Rightarrow SB \perp CS$ (đpcm)

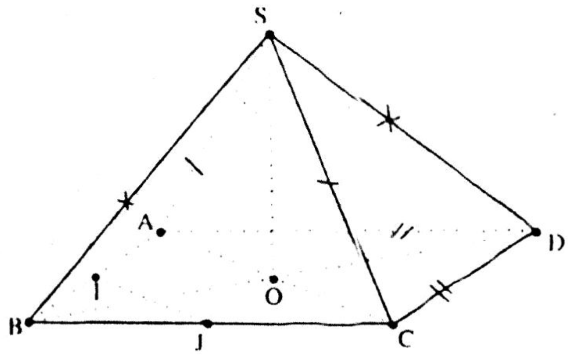
Bài 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O. Gọi I; J lần lượt là trung điểm của cạnh AB; BC. Biết $SA = SC$; $SB = SD$.

1. Chứng minh rằng: $SO \perp (ABCD)$.
2. Chứng minh rằng: $IJ \perp (SBD)$.
3. Chứng minh rằng: $AC \perp SD$.

Giải

1. Ta có O là tâm của hình thoi nên O là trung điểm của đoạn thẳng AC; BD.
Mặt khác ta có SA = SC nên $SO \perp AC$ (1)
Ta có O là trung điểm của đoạn thẳng BD; SB = SD nên $SO \perp BD$ (2)
Từ (1) và (2) $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$(đpcm).

2. Ta có $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp AC$ (3)
Mặt khác ta có $BD \perp AC$ (4)
Từ (3) và (4) $\Rightarrow AC \perp (SBD)$ (a)
Các điểm I; J lần lượt là trung điểm của các cạnh AB; BC
$\Rightarrow IJ \parallel AC$(b)
Từ (a) và (b) $\Rightarrow IJ \perp (SBD)$



3. Ta có $\begin{cases} SO \perp (ABCD) \\ AC \subset (ABCD) \\ BD \subset (ABCD) \\ AC \perp BD \end{cases}$

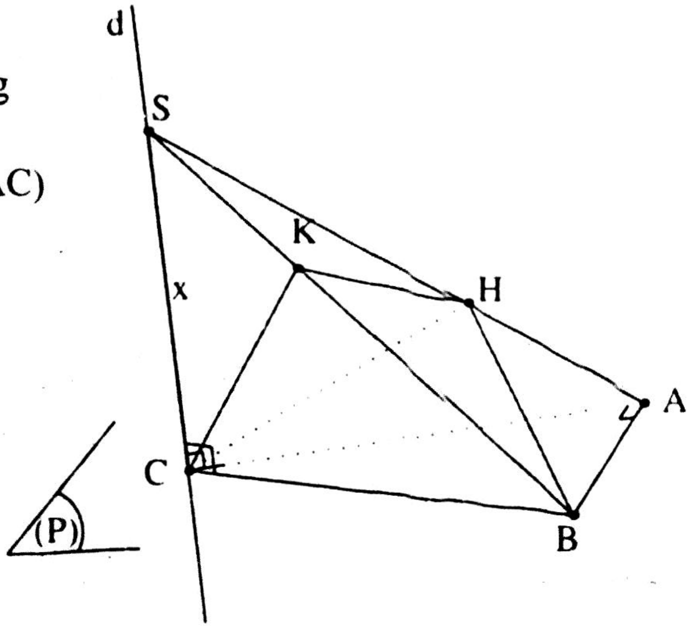
và đường thẳng BD là hình chiếu vuông góc của đường thẳng SD trên mặt phẳng (ABCD) nên $AC \perp SD$ (định lí ba đường vuông góc)

Bài 5: Cho ΔABC vuông tại A với BC = a; AC = b, S là điểm di động trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại C. Mặt phẳng (P) qua điểm C và vuông góc với SB cắt SA; SB lần lượt tại H; K.

1. Chứng minh rằng: $CH \perp (SAB)$ và điểm H thuộc đường tròn cố định.
2. Đặt SC = x. Tính độ dài đoạn thẳng HK theo a; b; x.

Giải

1. Ta có $AB \perp AC$ (vì ΔABC vuông tại A)
$\Rightarrow AB \perp SA$ (định lí ba đường vuông góc)
$\Rightarrow AB \perp (SAC)$. Mà $CH \subset (SAC)$
$\Rightarrow AB \perp CH$ (1)
Ta có $CH \subset (P)$; $SB \perp (P)$
$\Rightarrow SB \perp CH$ (2)
Từ (1) và (2) $\Rightarrow CH \perp (SAB)$.
* Chứng minh điểm H thuộc đường tròn cố định.
Ta có $CH \perp (SAB)$
$\Rightarrow CH \perp SA$



$\Rightarrow \widehat{CHA} = 90^0$

$\Rightarrow$ Điểm H thuộc đường tròn có đường kính AC (không đổi) vẽ trong mặt phẳng cố định (A, d)

2. Ta có $CH \perp (SAB)$

Mà $HK \subset (SAB)$

$\Rightarrow CH \perp KH$

Vậy tam giác CHK vuông tại H nên ta có:

$KH^2 = CK^2 - CH^2$ (*)

Mặt khác ta có:

$$CK = \frac{CS.CB}{SB} = \frac{CS.CB}{\sqrt{CS^2 + CB^2}} = \frac{x.a}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad (3)$$

$$CH = \frac{CS.CA}{SA} = \frac{CS.CA}{\sqrt{CS^2 + CA^2}} = \frac{x.b}{\sqrt{x^2 + b^2}} \quad (4)$$

Thay (3); (4) vào (*) ta được:

$$KH^2 = \frac{x^2.a^2}{x^2 + a^2} - \frac{x^2.b^2}{x^2 + b^2}$$

$$= x^2.\frac{a^2(x^2 + b^2) - b^2(x^2 + a^2)}{(x^2 + a^2).(x^2 + b^2)}$$

$$= \frac{x^4(a^2 - b^2)}{(x^2 + a^2).(x^2 + b^2)}$$

$$\Rightarrow KH = x^2.\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{(x^2 + a^2).(x^2 + b^2)}}$$

Bài 6: Cho tứ diện ABCD có AB = AC; BD = CD. Gọi I là trung điểm của cạnh BC.

1. Chứng minh rằng: $BC \perp (AID)$.

2. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên AI. Chứng minh rằng: $AH \perp (BCD)$.

Giải

1. Ta có AB = AC; I là trung điểm của cạnh BC

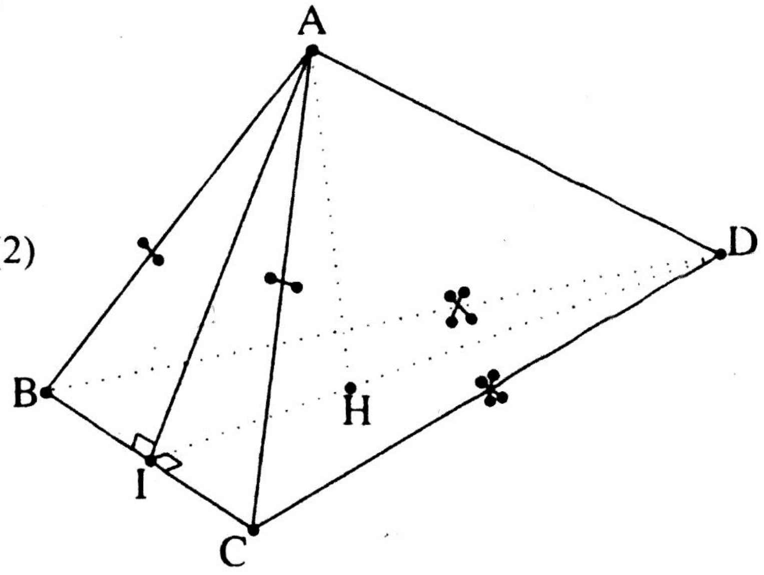
$\Rightarrow BC \perp AI$

Ta có BD = CD; I là trung điểm của cạnh BC

$\Rightarrow BC \perp DI$

$\Rightarrow BC \perp (AID)$ (đpcm)

2. Chứng minh $AH \perp (BCD)$



Cách 1:

Ta có $BC \perp (AID)$

Mà $AH \subset (AID)$

$\Rightarrow BC \perp AH$ (1)

Mặt khác ta có $DI \perp AH$(2)

(vì H là hình chiếu vuông góc của A trên AI)

Mà $DI \subset (BCD)$ (3)

Từ (1); (2); (3)

$\Rightarrow AH \perp (BCD)$.

Cách 2:

Ta có $BC \perp (AID)$

$\Rightarrow (BCD) \perp (AID)$

Mà $DI = (BCD) \cap (AID)$; $AH \perp DI$; $AH \subset (AID)$

$\Rightarrow AH \perp (BCD)$.

Bài 7: Cho ΔABC có ba góc nhọn. Đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Trên đường thẳng d lấy một điểm S khác A. Gọi I là trực tâm của ΔSBC, K là trực tâm của ΔABC; đường thẳng d cắt IK tại Q.

1. Chứng minh rằng: $IK \perp (SBC)$.
2. Đường thẳng AK cắt SI tại R. Chứng minh rằng: $RQ \perp SK$?

Giải

1. Chứng minh $IK \perp (SBC)$.

Gọi P là hình chiếu vuông góc của A trên BC $\Rightarrow \begin{cases} BC \perp AP \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAP)$.

Mà $SP \subset (SAP) \Rightarrow BC \perp SP$

Mặt khác I là trực tâm của ΔSBC nên điểm I thuộc đường thẳng SP

$\Rightarrow$ P là giao điểm SI và AK

Vậy $P \equiv R$.

Do đó ta có $BC \perp (SAR)$. Mà $IK \subset (SAR)$

$\Rightarrow BC \perp IK$(1)

Ta có $BK \perp AC \Rightarrow BK \perp SC$ (2) (định lí ba đường vuông góc)

Mặt khác ta có $BI \perp SC$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra: $SC \perp (BIK) \Rightarrow SC \perp IK$(4)

Từ (1) và (4) suy ra: $IK \perp (SBC)$ (đpcm)

2. Chứng minh $RQ \perp SK$

Ta có $IK \perp (SBC)$.

Mà $SR \subset (SBC)$

$\Rightarrow IK \perp SR \Rightarrow IQ \perp SR (a)$

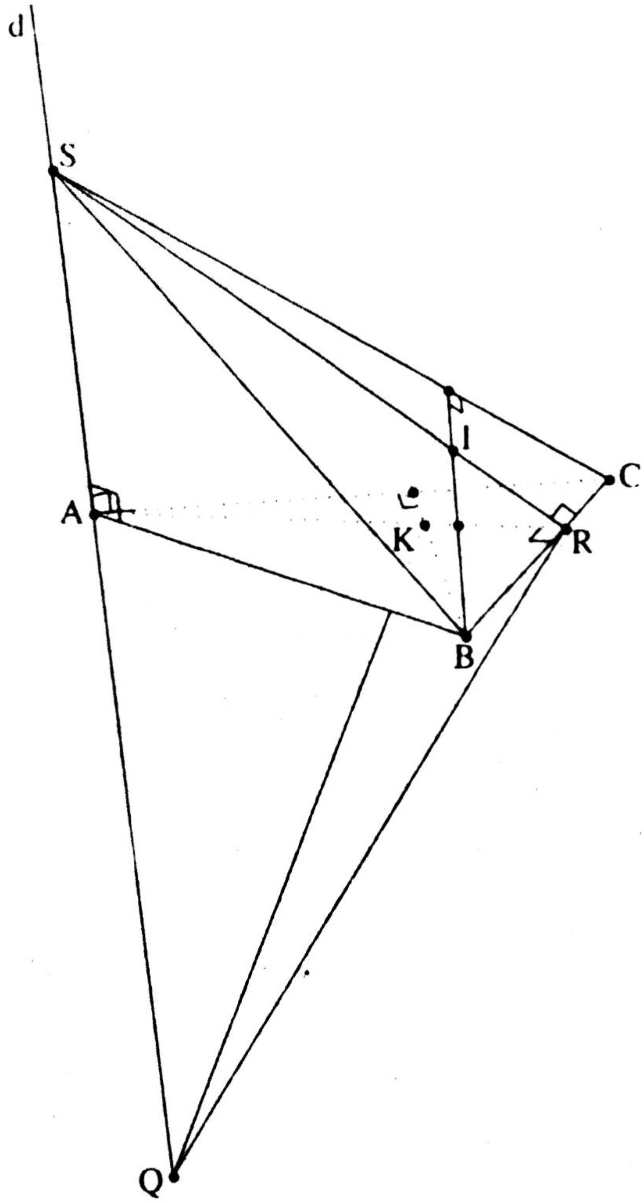
Ta có $SA \perp (ABC)$.

Mà $AR \subset (ABC)$

$\Rightarrow SA \perp AR (b)$

Từ (a) và (b) suy ra: K là trực tâm của tam giác SRQ.

$\Rightarrow SK \perp RQ$ (đpcm)



Bài 8: Cho tứ diện đều ABCD. Chứng minh rằng: các cạnh đối diện vuông góc với nhau từng đôi một.

Giải

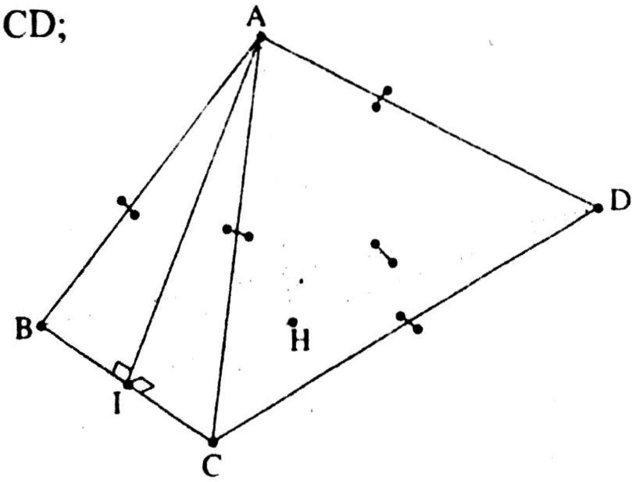
Ta chứng minh: $BC \perp AD$; $AB \perp CD$; $AC \perp BD$.

Gọi I là trung điểm của cạnh BC

$\Rightarrow \begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp DI \end{cases}$

(vì ΔABC; ΔDBC là các tam giác đều)

$\Rightarrow BC \perp (ADI)$



Mặt khác ta có: $AD \subset (ADI) \Rightarrow BC \perp AD$.

Tương tự, ta chứng minh được: $\begin{cases} AB \perp CD \\ AC \perp BD \end{cases}$

Bài 9: Cho tứ diện ABCD có $AB \perp CD$; $BC \perp AD$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (BCD). Chứng minh rằng:

1. H là trực tâm của tam giác BCD.
2. $AC \perp BD$.

Giải

1. Ta có $AH \perp (BCD)$

$\Rightarrow AH \perp BC$ (1)

Mặt khác ta có:

$AD \perp BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

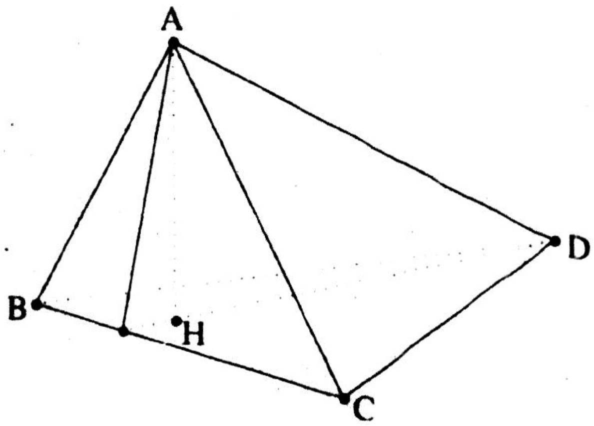
$BC \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp DH$

*Theo đề ra ta có $AB \perp CD$ (3)

Mặt khác ta có

$AH \perp (BCD)$

$\Rightarrow AH \perp DC$ (4)



Từ (3) và (4) suy ra:

$DC \perp (ABH) \Rightarrow DC \perp BH$

Vậy $BC \perp DH$; $CD \perp BH$.

$\Rightarrow$ H là trực tâm của tam giác BCD (đpcm).

2. Chứng minh $AC \perp BD$.

Ta có H là trực tâm của tam giác BCD

$\Rightarrow CH \perp BD$ (a).

Mặt khác ta có $AH \perp (BCD)$

$\Rightarrow AH \perp BD$ (b)

Từ (a) và (b) suy ra: $BD \perp (ACH)$

$\Rightarrow BD \perp AC$ (đpcm)

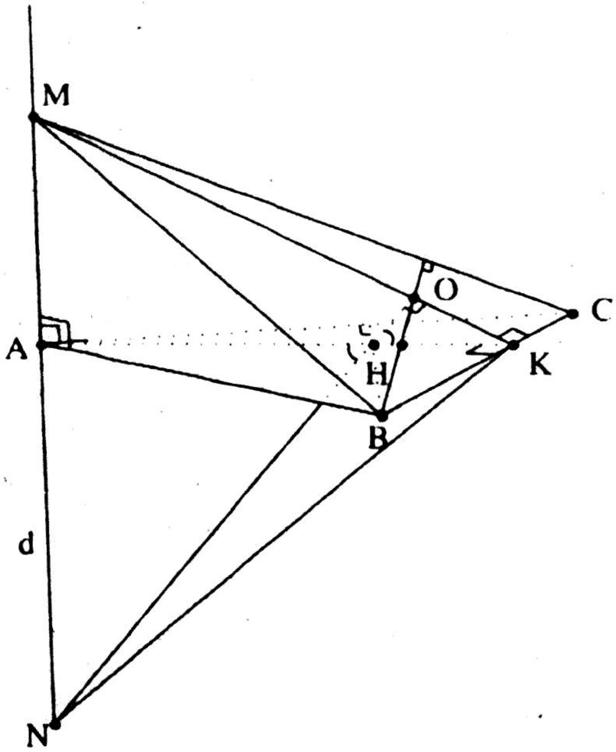
Bài 10: Cho ΔABC đều cạnh a. Trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A lấy điểm M khác A. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC; O là trực tâm của tam giác BCM.

1. Chứng minh rằng: $MC \perp (BOH)$. $OH \perp (BCM)$.

2. Đường thẳng OH cắt đường thẳng d tại N. Chứng minh rằng: tứ diện BCMN có các cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau.

3. Chứng minh rằng: khi M di chuyển trên d thì tích AM.AN không đổi?

Giải



1. Chứng minh $MC \perp (BOH)$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A trên BC

$\Rightarrow \begin{cases} BC \perp AK \\ BC \perp MA \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (MAK)$.

Mà $MK \subset (MAK)$.

$\Rightarrow BC \perp MK$

Mặt khác ta có O là trực tâm của ΔMBC nên điểm O thuộc đường thẳng MK

$\Rightarrow$ K là giao điểm MO và AH

Do đó ta có $BC \perp (MAK)$.

Mà $OH \subset (MAK)$

$\Rightarrow BC \perp OH$ (1)

Ta có:

$BH \perp AC$

$\Rightarrow BH \perp MC$ (2)

(định lí ba đường vuông góc)

Mặt khác ta có:

$BO \perp MC$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra: $MC \perp (BOH)$

*Chứng minh $OH \perp (BCM)$.

Ta có $MC \perp (BOH)$

$\Rightarrow MC \perp OH$ (4)

Từ (1) và (4) suy ra: $OH \perp (MBC)$ (đpcm)

2. Chứng minh tứ diện BCMN có các cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau, ta chứng minh: $BN \perp MC$; $BM \perp NC$; $BC \perp NM$

Ta có $OH \perp (MBC)$.

$\Rightarrow$ ON vuông góc với mặt phẳng (MBC) tại O

Mà $CM \subset (MBC)$; $CM \perp BO$; đường thẳng BO là hình chiếu vuông góc của BN trên mặt phẳng (MBC)

$\Rightarrow CM \perp BN$ (định lí ba đường vuông góc) (a)

* Ta có O là trực tâm của ΔMBC nên $BM \perp CO$

Mà đường thẳng CO là hình chiếu vuông góc của đường thẳng CN trên mặt phẳng (MBC)

$\Rightarrow BM \perp CN$ (định lí ba đường vuông góc) (b)

* Ta có $d \perp (ABC)$ (đường thẳng MN vuông góc với mặt phẳng (ABC))

$\Rightarrow MN \perp BC$ (c)

Từ (a); (b); (c) suy ra: tứ diện BCMN có các cặp cạnh đối diện với nhau

3. Ta có $\widehat{AKM}$ và $\widehat{ANH}$ cùng phụ với góc $\widehat{AHN}$ nên $\widehat{AKM} = \widehat{ANH}$

$\Rightarrow \Delta ANH$ và ΔAKM đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{AN}{AK} = \frac{AH}{AM} \Rightarrow AN.AM = AH.AK \ (*)$$

Mặt khác ta có ΔABC đều cạnh a nên $AK = \frac{\sqrt{3}.a}{2}$; H cũng là trọng tâm của ΔABC

$$\Rightarrow AH = \frac{2}{3}.AK = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}.a}{2} = \frac{\sqrt{3}.a}{3}.$$

Do đó từ (*) ta có: $AN.AM = \frac{\sqrt{3}.a}{3}.\frac{\sqrt{3}.a}{2} = \frac{a^2}{2}$ (không đổi).

Vậy khi M di chuyển trên d thì tích AM.AN không đổi

Bài 11: Cho tứ diện OABC có các cạnh OA; OB; OC đôi một vuông góc nhau; OA = a; OB = b; OC = c. Gọi H là điểm thuộc mặt phẳng (ABC) sao cho $OH \perp (ABC)$.

1. Chứng minh rằng tứ diện OABC có các cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau.
2. Chứng minh $BC \perp (OAH)$; H là trực tâm của tam giác ABC.
3. Chứng minh $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.
4. Chứng minh các góc của tam giác ABC đều nhọn.
5. Tính diện tích của tam giác ABC theo a; b; c.
6. Chứng minh:

   a. $a^2.\tan\widehat{BAC} = b^2.\tan\widehat{ABC} = c^2.\tan\widehat{ACB}$

   b. $\cos^2\widehat{HOA} + \cos^2\widehat{HOB} + \cos^2\widehat{HOC} = 1$
7. Gọi $S_{\Delta OAB}$ là diện tích của tam giác OAB. Chứng minh rằng:

$$S_{\Delta OAB} + S_{\Delta OBC} + S_{\Delta OCA} \geq \frac{9.OH^2}{2}$$

8. Đặt k = OA + OB + OC +AB + AC + BC. Tính giá trị lớn nhất của p = abc theo k.

9. Chứng minh $S^2_{\Delta ABC} = S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OAC}$.

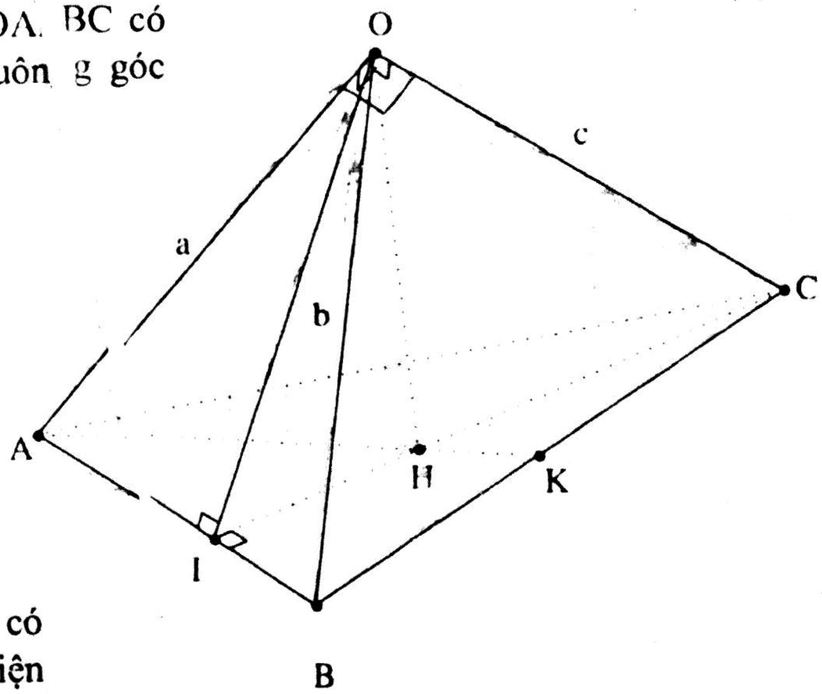
10. Gọi M; N; P lần lượt là trung điểm của cạnh AB; BC; AC. Chứng minh rằng bốn mặt của tứ diện OMNP là các tam giác bằng nhau.

Tính theo a; b; c giá trị của tích: $\frac{1}{3}.OH.S_{\Delta MNP}$

11. Giả sử $a^2 + b^2 + c^2 = h^2$ (h dương cho trước). Khi nào $S_{\Delta ABC}$ đạt giá trị lớn nhất. Chứng minh rằng khi đó OH cũng có độ dài lớn nhất.

Giải

1. Chứng minh tứ diện OABC có các cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau.



Ta có $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases}$

$\Rightarrow OA \perp (OBC)$

$\Rightarrow OA \perp BC$ (1)

Chứng minh tương tự ta có:

$\begin{cases} OB \perp AC \\ OC \perp AB \end{cases}$

Vậy tứ diện OABC có các cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau.

2. * Chứng minh $BC \perp (OAH)$

Ta có: $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $BC \perp (OAH)$

* Chứng minh H là trực tâm của tam giác ABC.

Ta có $BC \perp (OAH) \Rightarrow BC \perp AH$ (3)

Ta có $\begin{cases} OB \perp OC \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OC \perp (OAB)$

$\Rightarrow OC \perp AB$ (a)

Mặt khác ta có: $OH \perp (ABC)$

$\Rightarrow OH \perp AB$ (b)

Từ (a) và (b) suy ra: $AB \perp (OHC)$

$\Rightarrow HC \perp AB$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra H là trực tâm của tam giác ABC.

3. Chứng minh $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

Gọi K là giao điểm của AH và BC

Ta có $OA \perp (OBC)$ và $OK \subset (OBC)$

$\Rightarrow OA \perp OK$

Tam giác OAK vuông tại O có $OH \perp AK$.

$\Rightarrow \dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OK^2}$ (1)

Ta có $AK \perp BC$; OK là hình chiếu vuông góc của AK trên mặt phẳng (OBC).

$\Rightarrow BC \perp OK$ (định lí ba đường vuông góc)

Tam giác ΔOBC vuông tại O có $OK \perp BC$.

Do đó $\dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$ (2)

Thay (2) vào (1) ta được: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$ (đpcm).

4. Chứng minh các góc của tam giác ABC đều nhọn.

Ta có: $\begin{cases} AB^2 = a^2 + b^2 \\ AC^2 = a^2 + c^2 \\ BC^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$

Mặt khác ta có:

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{(a^2+b^2)+(a^2+c^2)-(b^2+c^2)}{2\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{a^2+c^2}}$$

$$\Rightarrow \cos\widehat{BAC} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{a^2+c^2}} > 0 \Rightarrow \widehat{BAC} \text{ là góc nhọn}$$

Tương tự, ta có $\cos\widehat{ABC} > 0$; $\cos\widehat{ACB} > 0$

$\Rightarrow$ các góc $\widehat{ABC}$; $\widehat{ACB}$ là các góc nhọn.

Vậy các góc của tam giác ABC đều nhọn.

5. Tính diện tích của tam giác ABC theo a; b; c.

Gọi $S_{\Delta ABC}$ là diện tích của tam giác ABC. Ta có:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AK.BC$$

Ta có $KA^2 = OA^2 + OK^2$. Mà $OK = \dfrac{OB.OC}{BC} = \dfrac{OB.OC}{\sqrt{OB^2+OC^2}} = \dfrac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$

$$\Rightarrow KA^2 = a^2 + \frac{b^2c^2}{b^2+c^2} = \frac{b^2a^2+a^2c^2+b^2c^2}{b^2+c^2}$$

$$\Rightarrow KA = \frac{\sqrt{b^2a^2+a^2c^2+b^2c^2}}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

Mặt khác ta có: $BC = \sqrt{b^2+c^2}$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{b^2a^2+a^2c^2+b^2c^2}}{\sqrt{b^2+c^2}}.\sqrt{b^2+c^2} = \frac{1}{2}.\sqrt{b^2a^2+a^2c^2+b^2c^2}.$$

Vậy $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.\sqrt{b^2a^2+a^2c^2+b^2c^2}$.

6. a. Chứng minh: $a^2.\tan\widehat{BAC} = b^2.\tan\widehat{ABC} = c^2.\tan\widehat{ACB}$

Cách 1:

Ta có: $\begin{cases} \tan\widehat{ACB} = \dfrac{AK}{CK} \\ \tan\widehat{ABC} = \dfrac{AK}{BK} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\tan\widehat{ACB}}{\tan\widehat{ABC}} = \dfrac{BK}{CK} = \dfrac{BK.BC}{CK.BC} = \dfrac{OB^2}{OC^2} = \dfrac{b^2}{c^2}$

$\Rightarrow b^2.\tan\widehat{ABC} = c^2.\tan\widehat{ACB}$ (5)

Chứng minh tương tự, ta có: $a^2.\tan\widehat{BAC} = c^2.\tan\widehat{ACB}$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra : $a^2.\tan\widehat{BAC} = b^2.\tan\widehat{ABC} = c^2.\tan\widehat{ACB}$ (đpcm)

Cách 2:

Ta có: $2S_{\Delta ABC} = KA.BC = BC.BK.\dfrac{AK}{AB} = OB^2.\tan\widehat{ABC} = b^2.\tan\widehat{ABC}$.

Vậy $2S_{\Delta ABC} = b^2.\tan\widehat{ABC}$.

Chứng minh tương tự, ta có:

$2S_{\Delta ABC} = a^2.\tan\widehat{BAC}$

$2S_{\Delta ABC} = c^2.\tan\widehat{ACB}$

$\Rightarrow a^2.\tan\widehat{BAC} = b^2.\tan\widehat{ABC} = c^2.\tan\widehat{ACB}$ (đpcm).

b. Chứng minh: $\cos^2\widehat{HOA} + \cos^2\widehat{HOB} + \cos^2\widehat{HOC} = 1$.

Ta có: $\cos\widehat{HOA} = \dfrac{OH}{OA}$; $\cos\widehat{HOB} = \dfrac{OH}{OB}$; $\cos\widehat{HOC} = \dfrac{OH}{OC}$

$$\Rightarrow \cos^2\widehat{HOA} + \cos^2\widehat{HOB} + \cos^2\widehat{HOC} = \frac{OH^2}{OA^2} + \frac{OH^2}{OB^2} + \frac{OH^2}{OC^2}$$

$$\Rightarrow \cos^2\widehat{HOA} + \cos^2\widehat{HOB} + \cos^2\widehat{HOC} = OH^2.\left(\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}\right) (7)$$

Mà $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ (8)

Từ (7) và (8) suy ra: $\cos^2\widehat{HOA} + \cos^2\widehat{HOB} + \cos^2\widehat{HOC} = 1$ (đpcm)

7. Chứng minh rằng: $S_{\Delta OAB} + S_{\Delta OBC} + S_{\Delta OCA} \geq \frac{9.OH^2}{2}$.

Ta có: $\begin{cases} S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}.OA.OB = \frac{1}{2}.ab \\ S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}.OA.OC = \frac{1}{2}.ac \\ S_{\Delta OBC} = \frac{1}{2}.OB.OC = \frac{1}{2}.bc \end{cases}$

$$\Rightarrow S_{\Delta OAB} + S_{\Delta OBC} + S_{\Delta OCA} = \frac{1}{2}.ab + \frac{1}{2}.ac + \frac{1}{2}.bc$$

$$= \frac{1}{2}(ab + ac + bc) \geq \frac{1}{2}.3.\sqrt[3]{ab.ac.bc}$$

$$= \frac{3}{2}.\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \text{ (I)}$$

Mặt khác ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$$

$$= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 3.\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}} = 3.\frac{1}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} \text{ (II)}$$

Từ (I) và (II) suy ra : $(S_{\Delta OAB} + S_{\Delta OBC} + S_{\Delta OCA})\frac{1}{OH^2} \geq \frac{9}{2}$

$$\Rightarrow S_{\Delta OAB} + S_{\Delta OBC} + S_{\Delta OCA} \geq \frac{9.OH^2}{2} \text{ (đpcm)}$$

8. Tính giá trị lớn nhất của p = abc theo k.

Ta có k = OA + OB + OC + AB + AC + BC

$$= a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2}$$

Mặt khác ta có: $a + b + c \geq 3.\sqrt[3]{abc}$

và $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2} \geq \sqrt{2ab} + \sqrt{2ac} + \sqrt{2bc}$

Mà $\sqrt{2ab} + \sqrt{2ac} + \sqrt{2bc} \geq 3.\sqrt[3]{\sqrt{2ab}.\sqrt{2ac}.\sqrt{2bc}} = 3.\sqrt{2}.\sqrt[3]{abc}$

$\Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+c^2} + \sqrt{b^2+c^2} \geq 3.\sqrt{2}.\sqrt[3]{abc}$

$\Rightarrow k = a + b + c + \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+c^2} + \sqrt{b^2+c^2} \geq 3.\sqrt[3]{abc} + 3.\sqrt{2}.\sqrt[3]{abc}$

$\Rightarrow k \geq 3.\sqrt[3]{abc} + 3.\sqrt{2}.\sqrt[3]{abc} = 3(1+\sqrt{2})\sqrt[3]{abc}$

$$\Rightarrow \frac{k}{3(1+\sqrt{2})} \geq \sqrt[3]{abc} \Rightarrow p = abc \leq \frac{k^3}{27(1+\sqrt{2})^3} = \frac{k^3(\sqrt{2}-1)^3}{27} \text{(III)}$$

Bất đẳng thức (III) xảy ra dấu "="

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+c^2} = \sqrt{b^2+c^2} \\ \sqrt{2ab} = \sqrt{2ac} = \sqrt{2cb} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c$$

Mặt khác ta có $k = a + b + c + \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+c^2} + \sqrt{b^2+c^2}$

$$\Rightarrow k = 3a + 3a\sqrt{2} \Rightarrow k = 3a(1+\sqrt{2}) \Rightarrow a = \frac{k}{3(1+\sqrt{2})} = \frac{k(\sqrt{2}-1)}{3}$$

Vậy bất đẳng thức (III) xảy ra dấu "=" $\Leftrightarrow c = b = a = \dfrac{k(\sqrt{2}-1)}{3}$

Do đó ta có kết luận: p = abc đạt giá trị lớn nhất bằng $P_{max} = \dfrac{k^3(\sqrt{2}-1)^3}{27}$

khi và chỉ khi $c = b = a = \dfrac{k(\sqrt{2}-1)}{3}$

9. Chứng minh $S^2_{\Delta ABC} = S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OAC}$.

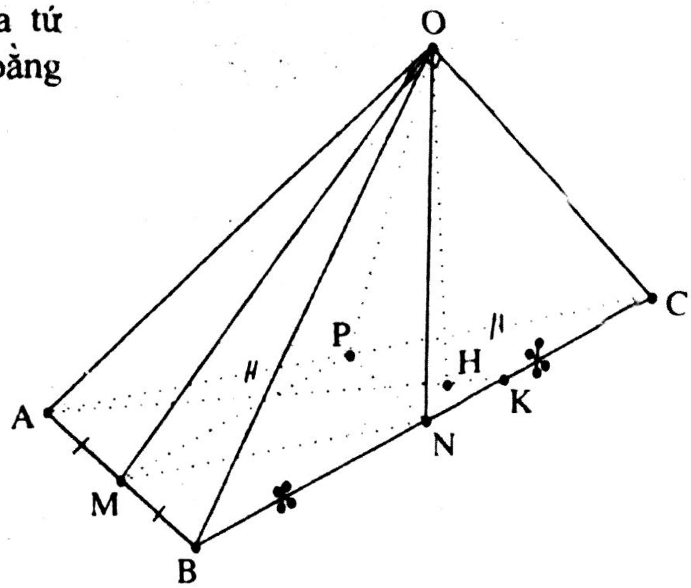
Theo lời giải trên ta có:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.\sqrt{b^2a^2 + a^2c^2 + b^2c^2} \text{ và } \begin{cases} S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}.OA.OB = \frac{1}{2}.ab \\ S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}.OA.OC = \frac{1}{2}.ac \\ S_{\Delta OBC} = \frac{1}{2}.OB.OC = \frac{1}{2}.bc \end{cases}$$

$$\Rightarrow S^2_{\Delta ABC} = \frac{1}{4}(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = \frac{1}{4}.a^2b^2 + \frac{1}{4}.a^2c^2 + \frac{1}{4}.b^2c^2$$

$$= S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OAC} \text{(đpcm).}$$

10. *Chứng minh bốn mặt của tứ diện OMNP là các tam giác bằng nhau.



Ta có $\begin{cases} OM = \dfrac{AB}{2} = PN \\ ON = \dfrac{BC}{2} = PM \\ OP = \dfrac{AC}{2} = MN \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta OMP = \Delta PNO = \Delta NPM = \Delta MON$

Vậy bốn mặt của tứ diện OMNP là các tam giác bằng nhau.

* Tính theo a; b; c giá trị của tích: $\frac{1}{3}.OH.S_{\Delta MNP}$

Ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{c^2b^2 + a^2c^2 + b^2a^2}{a^2b^2c^2}$$

$$\Rightarrow OH = \frac{abc}{\sqrt{c^2b^2 + a^2c^2 + b^2a^2}}$$

Mặt khác ta có: NP // AB và $NP = \frac{AB}{2} \Rightarrow d(C; NP) = \frac{1}{2}.d(C; AB)$

(Với d(C; AB) là khoảng cách từ C đến đường thẳng AB)

$$\Rightarrow S_{\Delta MNP} = \frac{1}{2}.NP.d(C; NP) = \frac{1}{2}.\frac{AB}{2}.\frac{1}{2}d(C; AB)$$

$$= \frac{1}{4}(\frac{1}{2}AB.d(C; AB)) = \frac{1}{4}.S_{\Delta ABC}$$

$$= \frac{1}{4}.\frac{1}{2}.\sqrt{b^2a^2 + a^2c^2 + b^2c^2}.$$

Do đó ta có:

$$\frac{1}{3}.OH.S_{\Delta MNP} = \frac{1}{3}.\frac{abc}{\sqrt{c^2b^2 + a^2c^2 + b^2a^2}}.(\frac{1}{4}.\frac{1}{2}.\sqrt{b^2a^2 + a^2c^2 + b^2c^2}) = \frac{abc}{24}$$

Vậy ta có $\frac{1}{3}.OH.S_{\Delta MNP} = \frac{abc}{24}$

11. Ta có: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.\sqrt{b^2a^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$

$$\Rightarrow S^2_{\Delta ABC} = \frac{1}{4}(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$$

$$= \frac{1}{12}.(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) + \frac{1}{6}.(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) \ (9)$$

Mặt khác ta có: $\begin{cases} a^2b^2 \le \dfrac{a^4 + b^4}{2} \\ a^2c^2 \le \dfrac{a^4 + c^4}{2} \\ c^2b^2 \le \dfrac{c^4 + b^4}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \le \frac{a^4 + b^4}{2} + \frac{a^4 + c^4}{2} + \frac{c^4 + b^4}{2} = a^4 + b^4 + c^4 \ (10)$$

$$\Rightarrow S^2_{\Delta ABC} \le \frac{1}{12}(a^4 + b^4 + c^4) + \frac{1}{6}.(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$$

Mà $\frac{1}{12}(a^4 + b^4 + c^4) + \frac{1}{6}(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$

$$= \frac{1}{12}(a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2)$$

$$= \frac{1}{12}(a^2 + b^2 + c^2)^2 = \frac{1}{12}.h^4$$

$$\Rightarrow S^2_{\Delta ABC} \le \frac{1}{12}.h^4 \Rightarrow S_{\Delta ABC} \le \frac{h^2}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}.h^2}{6} \ (11)$$

Bất đẳng thức (11) xảy ra dấu "=" khi và chỉ khi $a^2 = b^2 = c^2$

Mặt khác ta có: $a^2 + b^2 + c^2 = h^2$

Do đó $3a^2 = h^2 \Rightarrow a = \frac{h\sqrt{3}}{3}$ (vì $h > 0$)

Vậy bất đẳng thức (11) xảy ra dấu "=" khi và chỉ khi $b = c = a = \frac{h\sqrt{3}}{3}$

Kết luận: $S_{\Delta ABC}$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{\sqrt{3}.h^2}{6}$ khi và chỉ khi $b = c = a = \frac{h\sqrt{3}}{3}$

** Chứng minh rằng khi đó OH cũng có độ dài lớn nhất.*

Ta có:

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq 3.\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}}=3.\frac{1}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}\quad(12)$$

Mặt khác ta có $\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\leq\frac{a^2+b^2+c^2}{3}=\frac{h^2}{3}$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}\geq\frac{3}{h^2}\Rightarrow 3.\frac{1}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}\geq\frac{9}{h^2}\quad(13)$$

Từ (12); (13) $\Rightarrow\frac{1}{OH^2}\geq\frac{9}{h^2}\Rightarrow OH^2\leq\frac{h^2}{9}\Rightarrow OH\leq\frac{h}{3}$ (14)

Bất đẳng thức (14) xảy ra dấu "=" khi và chỉ khi $a^2=b^2=c^2$

Mặt khác ta có: $a^2+b^2+c^2=h^2$

$\Rightarrow 3a^2=h^2\Rightarrow a=\frac{h\sqrt{3}}{3}$ (vì $h>0$)

Vậy bất đẳng thức (14) xảy ra dấu "=" khi và chỉ khi $b=c=a=\frac{h\sqrt{3}}{3}$

Do đó $S_{\Delta ABC}$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{\sqrt{3}.h^2}{6}\Leftrightarrow b=c=a=\frac{h\sqrt{3}}{3}$

Khi đó OH cũng đạt giá trị lớn nhất bằng $OH_{max}=\frac{h}{3}$.

Bài 12: Cho hình chóp S.ABCD với SA $\perp$(ABCD); SA= $a\sqrt{3}$; ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi H; K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB; SD.

1. Chứng minh SC $\perp$ (AHK).
2. Chứng minh KH // BD.
3. Gọi I là giao điểm của SC và mặt phẳng (AHK)
   a. Xác định điểm I.
   b. Chứng minh AI $\perp$ SC; AI $\perp$ HK.
   c. Tính diện tích tứ giác AHIK theo a.

Giải

1. Chứng minh SC $\perp$ (AHK).

Ta có $\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp SA\end{cases}$

$\Rightarrow$ BC $\perp$ (SAB).

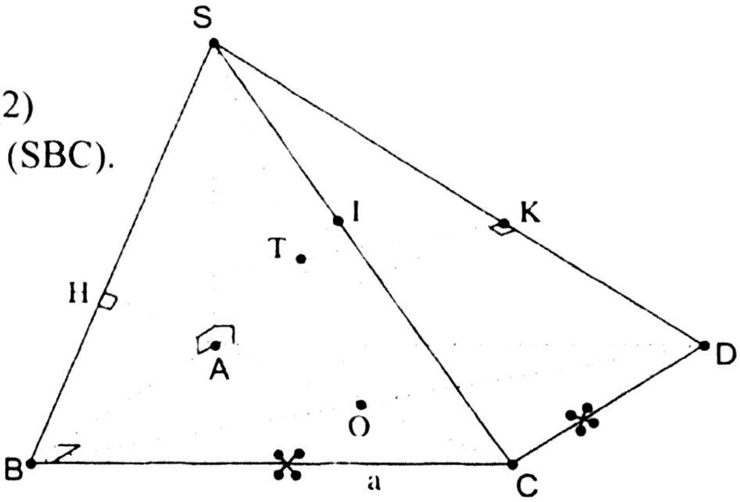
Mà $AH \subset (SAB)$

$\Rightarrow BC \perp AH$ (1)

Mặt khác ta có: $SB \perp AH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AH \perp (SBC)$.

$\Rightarrow AH \perp SC$ (3)



Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases}$

$\Rightarrow CD \perp (SAD)$

Mà $AK \subset (SAD)$

$\Rightarrow CD \perp KA$

Mặt khác ta có: $SD \perp KA$

$\Rightarrow KA \perp (SCD) \Rightarrow KA \perp SC$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $SC \perp (AHK)$ (đpcm)

2. Chứng minh $KH // BD$.

Cách 1:

Ta có $\Delta SAB = \Delta SAD \Rightarrow \widehat{ASH} = \widehat{ASK}$ và $SB = SD$

$\Rightarrow \Delta SHA = \Delta SKA \Rightarrow SH = SK$

$\Rightarrow \dfrac{SH}{SB} = \dfrac{SK}{SB} \Rightarrow \dfrac{SH}{SB} = \dfrac{SK}{SD}$ (vì $\Delta SAB = \Delta SAD \Rightarrow SB = SD$)

$\Rightarrow HK // BD$ (đpcm)

Cách 2:

Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp CS$

Mặt khác ta có: $(AHK) \perp CS$ và CS không có điểm chung với (AHK)

$\Rightarrow BD // (AHK)$(5)

Ta có $BD \subset (SBD)$; $(SBD) \cap (AHK) = KH$ (6)

Từ (5)và (6) suy ra: $BD // KH$ (đpcm)

3. *a. Xác định điểm $I = CS \cap (AHK)$*

Gọi O là tâm hình vuông ABCD. Gọi T là giao điểm của KH và SO

Mặt khác ta có: $CS \subset (SAC)$; $(SAC) \cap (AHK) = AT$

Khi đó $I = CS \cap AT$

b. **Chứng minh $AI \perp HK$.*

Ta có $BD \perp AC$; $BD \perp SA$

nên $BD \perp (SAC)$ (*)

Mà $I = SC \cap (AHK)$

$\Rightarrow I \in (SAC)$

$\Rightarrow AI \subset (SAC)$

Do đó từ (*) $\Rightarrow$ $BD \perp AI$

Mà HK // BD

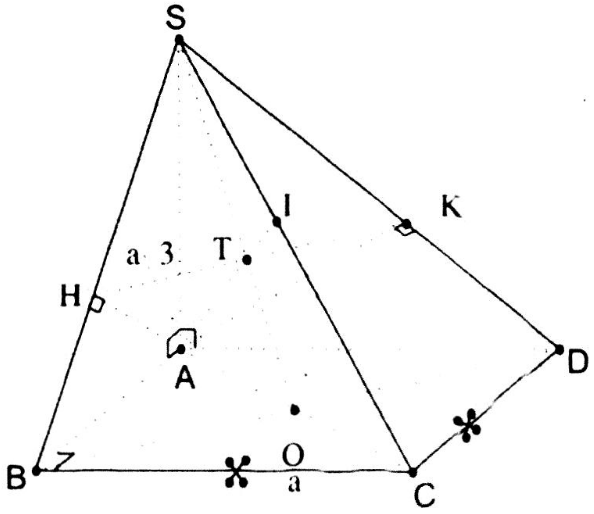
$\Rightarrow$ $HK \perp AI$ (đpcm)

**Chứng minh $AI \perp SC$*

Ta có $CS \perp (AHK)$

Mà $AI \subset (AHK)$

$\Rightarrow$ $CS \perp AI$ (đpcm)



c. *Tính diện tích tứ giác AHIK theo a.*

Theo chứng minh tứ giác AHIK có $HK \perp AI$. Do đó diện tích S của tứ giác AHIK là:

$$S = \frac{1}{2}.AI.KH \text{ (I)}$$

Ta có KH // BD $\Rightarrow \dfrac{HK}{BD} = \dfrac{SK}{SD}$

$$\Rightarrow KH = \frac{SK.BD}{SD} = \frac{SK.SD.BD}{SD^2} = \frac{SA^2.BD}{SD^2} = \frac{SA^2.AB.\sqrt{2}}{SA^2 + AD^2}$$

$$= \frac{3a^2.a\sqrt{2}}{3a^2 + a^2} = \frac{3.a\sqrt{2}}{4} \text{ (II)}$$

Mặt khác ta có: $CS \perp AI$

$$\Rightarrow AI = \frac{SA.AC}{SC} = \frac{SA.AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} (AC = BD = a\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}.a\sqrt{2}}{\sqrt{3a^2 + 2a^2}} = \frac{a\sqrt{30}}{5}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{30}}{5}.\frac{3.a\sqrt{2}}{4} = \frac{3.a^2.\sqrt{15}}{20}.$$

Bài 13: Cho tứ diện OABC có OA; OB; OC đôi một vuông góc nhau; OA = OB = OC = a. Gọi K; M; N lần lượt là trung điểm của cạnh AB; BC; CA. Trên tia OK lấy điểm E sao cho K là trung điểm của đoạn thẳng OE. Gọi I là giao điểm của CE và mặt phẳng (OMN).

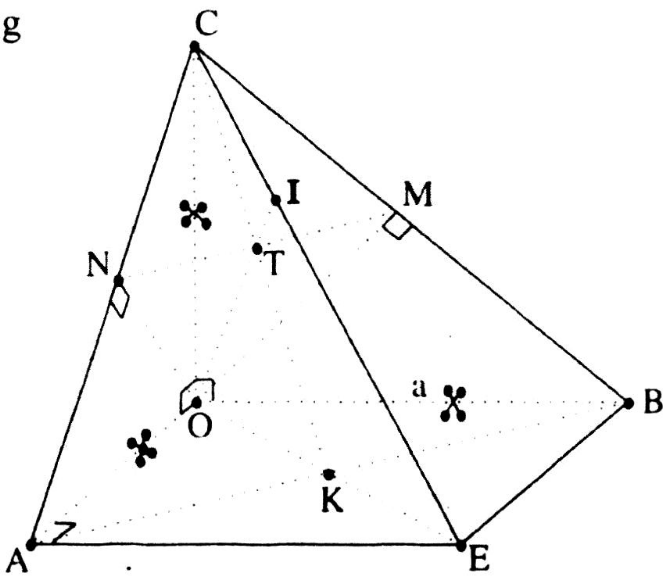
1. Chứng minh rằng: $CE \perp (OMN)$.
2. Tính diện tích của tứ giác OMIN theo a

Giải

1. Chứng minh $CE \perp (OMN)$.

Ta có tam giác OAB là tam giác vuông cân tại O và K là trung điểm mỗi đoạn thẳng OE; AB.

$\Rightarrow$ Tứ giác OAEB là hình vuông



Ta có $\begin{cases} OA \perp OB \\ OC \perp OB \end{cases}$

$\Rightarrow OB \perp (OAC)$.

Ta có $EA // OB$

$\Rightarrow EA \perp (OAC)$.

Ta có tam giác OAC là tam giác vuông cân tại O và N là trung điểm của cạnh AC

$\Rightarrow ON \perp AC$

Mặt khác ta có: AC là hình chiếu vuông góc của EC trên mặt phẳng (OAC)

$\Rightarrow ON \perp CE$ (định lí ba đường vuông góc)

Tương tự, ta có $ON \perp CE$

$\Rightarrow CE \perp (OMN)$ (đpcm).

2. Gọi $T = MN \cap CK$

$\Rightarrow OT = (OMN) \cap (OCK)$

Khi đó I chính là giao điểm của OT và CE $\Rightarrow OI \subset (OMN)$

Mặt khác ta có: $CE \perp (OMN) \Rightarrow CE \perp OI$

Ta có $\begin{cases} OC \perp OA \\ OC \perp OB \end{cases}$

$\Rightarrow OC \perp (OAB) \Rightarrow OC \perp AB$.

Ta có $OK \perp AB. \Rightarrow AB \perp (OKC)$

$\Rightarrow AB \perp OI$ (vì $OI \subset (OKC)$)

Ta có $MN // AB \Rightarrow MN \perp OI$

Tứ giác OMIN có $MN \perp OI$ nên diện tích S của tứ giác OMIN là:

$$S = \frac{1}{2}.MN.\ OI = \frac{1}{2}.\frac{AB}{2}.\frac{OC.OE}{CE} = \frac{1}{2}.\frac{AB}{2}.\frac{OC.AB}{\sqrt{OC^2 + AB^2}}$$

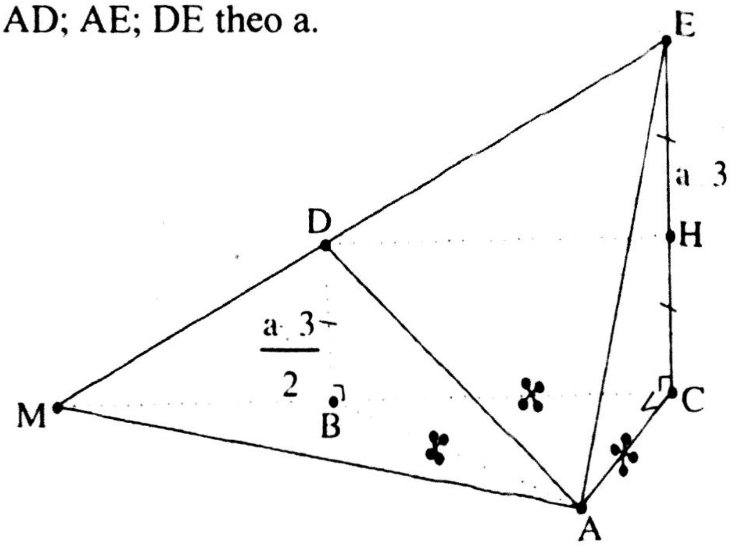
$$= \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a.a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + 2a^2}} = \frac{a^2.\sqrt{3}}{6}. = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a.a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + 2a^2}} = \frac{a^2.\sqrt{3}}{6}$$

Bài 14: Cho tam giác ABC đều cạnh a. Trên các đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại B; C lần lượt lấy D và E nằm về một phía đối với mặt phẳng (ABC) sao cho: BD = $\dfrac{a.\sqrt{3}}{2}$; CE = a$\sqrt{3}$.

1. Tính độ dài các đoạn thẳng AD; AE; DE theo a.
2. Gọi M là giao điểm của ED và BC. Chứng minh rằng: AM $\perp$ (ACE)

Giải

1. Tính độ dài các đoạn thẳng AD; AE; DE theo a.



Tam giác ABD vuông tại B

$\Rightarrow AD^2 = AB^2 + BD^2$

$= a^2 + \dfrac{3a^2}{4} = \dfrac{7a^2}{4}$

$\Rightarrow AD = \dfrac{a.\sqrt{7}}{2}$

Tam giác ACE vuông tại C

$\Rightarrow AE^2 = AC^2 + CE^2$

$= a^2 + 3a^2 = 4a^2$

$\Rightarrow AE = 2a$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên CE. Ta có HC = EH = $\dfrac{a.\sqrt{3}}{2}$

Tam giác DHE vuông tại H

$\Rightarrow DE^2 = DH^2 + HE^2 = a^2 + (\dfrac{a.\sqrt{3}}{2})^2 = \dfrac{7a^2}{4} \Rightarrow AE = \dfrac{a.\sqrt{7}}{2}$

Vậy AD = AE = $\dfrac{a.\sqrt{7}}{2}$; AE = 2a

2. Chứng minh AM $\perp$ (ACE)

Ta có BD // CE và BD = $\dfrac{a.\sqrt{3}}{2} = \dfrac{CE}{2}$

$\Rightarrow$ BD là đường trung bình của tam giác CME.

$\Rightarrow$ D là trung điểm của cạnh ME

$\Rightarrow$ DM = DE = AD

$\Rightarrow$ Tam giác AME vuông tại A $\Rightarrow$ AE $\perp$ AM

Mặt khác ta có: $\begin{cases} AM \subset (ABC) \\ CE \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow CE \perp AM \Rightarrow AM \perp (ACE)$ (đpcm)

Bài 15: Cho hình chóp S.ABCD với ABCD là hình thang vuông tại A; B; $SA \perp (ABCD)$; $BC = 2AB = 2a$. $SA = a$; $AC \perp BD$.

1. Chứng minh rằng: ΔSBC vuông.
2. Tính theo a độ dài đoạn thẳng AD.
3. M là điểm trên cạnh SA; $AM = x$; gọi E là hình chiếu vuông góc của D trên BM. Tính theo a và x độ dài đoạn thẳng DE. Xác định x để đoạn thẳng DE có độ dài lớn nhất; nhỏ nhất.

Giải

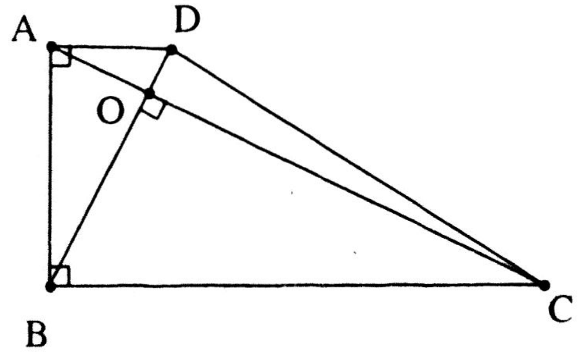
1. Chứng minh ΔSBC vuông.

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$

Mặt khác ta có: tứ giác ABCD là hình thang vuông tại A; B nên $AB \perp BC$.

$\Rightarrow BC \perp SB$ (định lí ba đường vuông góc)

$\Rightarrow \Delta SBC$ vuông ở B



2. Gọi $O = AC \cap BD$

Ta có $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= a^2 + (2a)^2 = 5a^2$

$\Rightarrow AC = a\sqrt{5}$

Ta có $AC \perp BD$; $O = AC \cap BD$

$\Rightarrow AC.OA = AB^2$

$$\Rightarrow OA = \frac{AB^2}{AC} = \frac{a^2}{a\sqrt{5}} = \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

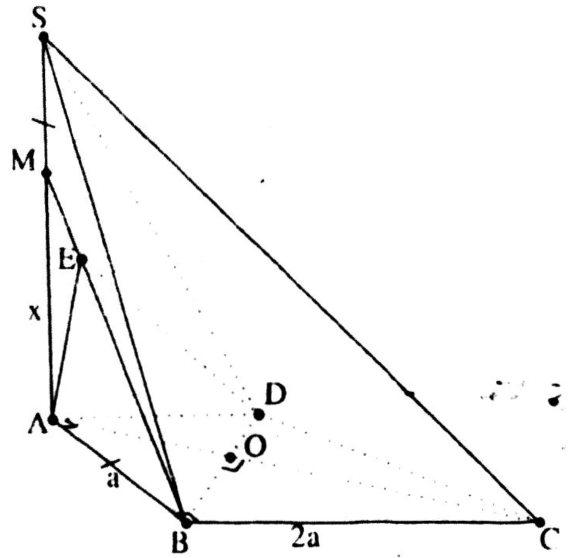
Mặt khác ta có: $\dfrac{1}{OA^2} = \dfrac{1}{AD^2} + \dfrac{1}{AB^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{OA^2} - \frac{1}{AB^2}$$

$$= \frac{5}{a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{4}{a^2}$$

$$\Rightarrow AD^2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow AD = \frac{a}{2}$$

Vậy $AD = \dfrac{a}{2}$



3. E là hình chiếu vuông góc của D trên $BM \Rightarrow DE \perp BM$ (1)

Ta có $\begin{cases} AD \perp SA \\ AD \perp AB \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB)$

Mà BM $\subset$ (SAB)

Do đó AD $\perp$ BM (2)

Từ (1) và (2) suy ra : BM $\perp$ (ADE).

$\Rightarrow$ BM $\perp$ AE.

Tam giác ABM vuông tại A có BM $\perp$ AE.

$$\Rightarrow AE = \frac{AM.AB}{BM} = \frac{AM.AB}{\sqrt{AM^2 + AB^2}} = \frac{x.a}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Mặt khác ta có: AD $\perp$ (SAB)

Mà AE $\subset$ (SAB)

Do đó AD $\perp$ AE

$$\Rightarrow DE^2 = AE^2 + AD^2 = \left(\frac{x.a}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$= \frac{x^2.a^2}{x^2+a^2} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2(x^2+a^2) + 4x^2.a^2}{4(x^2+a^2)}$$

$$\Rightarrow DE^2 = \frac{a^2}{4}.\frac{5x^2+a^2}{x^2+a^2} = \frac{a^2}{4}.\frac{5(x^2+a^2) - 4a^2}{x^2+a^2} = \frac{a^2}{4}.\left(5 - \frac{4a^2}{x^2+a^2}\right)$$

$$\Rightarrow DE = \frac{a}{2}.\sqrt{5 - \frac{4a^2}{x^2+a^2}}$$

*Xác định x để DE = $\frac{a}{2}.\sqrt{5 - \frac{4a^2}{x^2+a^2}}$ ($\forall x \in [0;a]$) đạt giá trị lớn nhất; giá trị nhỏ nhất

+ DE = $\frac{a}{2}.\sqrt{5 - \frac{4a^2}{x^2+a^2}}$ đạt giá trị lớn nhất ($\forall x \in [0;a]$)

$\Leftrightarrow \frac{4a^2}{x^2+a^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất ($\forall x \in [0;a]$)

$\Leftrightarrow x^2 + a^2$ đạt giá trị lớn nhất ($\forall x \in [0;a]$) $\Leftrightarrow$ x = a

+ DE = $\frac{a}{2}.\sqrt{5 - \frac{4a^2}{x^2+a^2}}$ đạt giá trị nhỏ nhất ($\forall x \in [0;a]$)

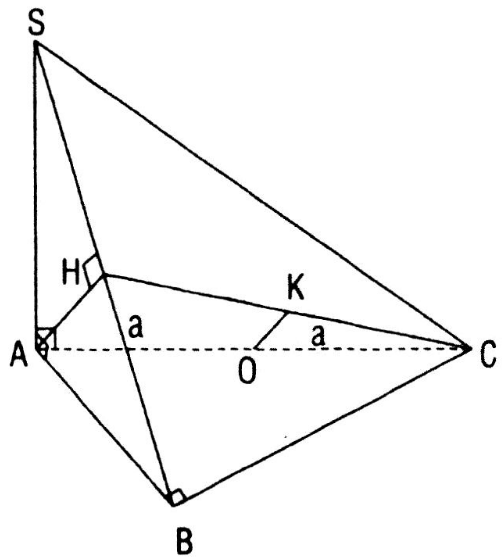
$\Leftrightarrow \frac{4a^2}{x^2+a^2}$ đạt giá trị lớn nhất ($\forall x \in [0;a]$)

$\Leftrightarrow x^2 + a^2$ đạt giá trị nhỏ nhất ($\forall x \in [0;a]$) $\Leftrightarrow$ x = 0

Bài 16: Cho tứ diện ABCS; tam giác ABC là tam giác vuông cân tại B; $SA \perp (ABC)$; $AC = 2a$.

1. Chứng minh rằng: $(SAB) \perp (SBC)$.
2. Trong mặt phẳng (SAB) vẽ AH vuông góc với SB tại H. Chứng minh $AH \perp (SBC)$.
3. Tính độ dài đoạn thẳng AH.
4. Gọi O là trung điểm của AC, K là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (SBC). Tính độ dài đoạn thẳng OK.

Giải



1. Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow (SAB) \perp (SBC)$ (đpcm).

2. Ta có : $\begin{cases} (SAB) \perp (SBC) \\ SB = (SAB) \cap (SBC) \\ AH \subset (SAB) \end{cases}$

$\Rightarrow AH \perp (SBC)$.

3. Tam giác SAB vuông tại A có đường cao AH do đó $AH = \dfrac{SA.AB}{SB}$

$\Rightarrow AH = \dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}}$

Mà $AC = AB\sqrt{2} \Rightarrow 2a = AB\sqrt{2} \Rightarrow AB = a.\sqrt{2}$

$\Rightarrow AH = \dfrac{a.a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + 2a^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Chú ý: Ta có thể dùng hệ thức $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2}$ để tính AH

4. Ta có $AH \perp (SBC)$ (theo chứng minh câu 2)

$\Rightarrow (AHC) \perp (SBC)$

Mặt khác ta có: $HC = (AHC) \cap (SBC)$; $O \in (AHC)$

Khi đó điểm K là hình chiếu vuông góc điểm O trên HC

$\Rightarrow OK \perp HC \Rightarrow OK \perp (SBC)$.

Ta có $AH \perp (SBC)$; điểm O không thuộc AH nên ta có OK // AH(1)

Điểm O là trung điểm cạnh AC (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OK = \dfrac{AH}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$

Bài 17: Cho tứ diện ABCS có SA $\perp$ (ABC). Gọi H; K lần lượt là trực tâm của tam giác ABC; SBC. Chứng minh rằng:

1. AH; SK; BC đồng quy.
2. (ACS) $\perp$ (BHK).
3. KH $\perp$ (SBC) và (BCS) $\perp$ (BHK).

Giải

1. Gọi R là giao điểm của AH và BC.

Ta cần chứng minh ba điểm S; K; R thẳng hàng.

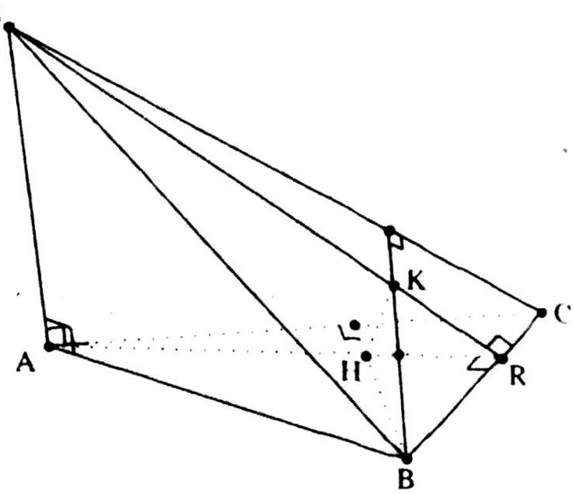
$\Rightarrow$ AR $\perp$ BC

$\Rightarrow$ SR $\perp$ BC (định lí ba đường vuông góc)

Mặt khác ta có: K là trực tâm của tam giác SBC

Do đó K thuộc đường cao SR của ΔSBC

$\Rightarrow$ Ba điểm S; K; R thẳng hàng.



$\Rightarrow$ Các đường thẳng AH; SK; BC đồng quy.

2. Ta có SA $\perp$ (ABC); BH $\subset$ (ABC) $\Rightarrow$ SA $\perp$ BH (1)

Mặt khác ta có: H là trực tâm của ΔABC nên AC $\perp$ BH (2)

Từ (1) và (2) suy ra : BH $\perp$ (SAC)

Ta có BH $\subset$ (BHK)

$\Rightarrow$ (BHK) $\perp$ (SAC)

3. * *Chứng minh* KH $\perp$ (SBC)

Ta có BC $\perp$(SAR); KH $\subset$ (ARS)$\Rightarrow$BC $\perp$KH (a).

Ta có BH $\perp$ (SAC) $\Rightarrow$ BH $\perp$ CS (3)

Mặt khác ta có: K là trực tâm của tam giác SBC nên , KB$\perp$ CS (4)

Từ (3) và (4) suy ra: CS $\perp$ (BHK)$\Rightarrow$ CS $\perp$ KH (b)

Từ (a) và (b) suy ra: KH $\perp$ (SBC)

* *Chứng minh* (BCS) $\perp$ (BHK).

Ta có KH $\perp$(SBC); KH $\subset$ (BHK).

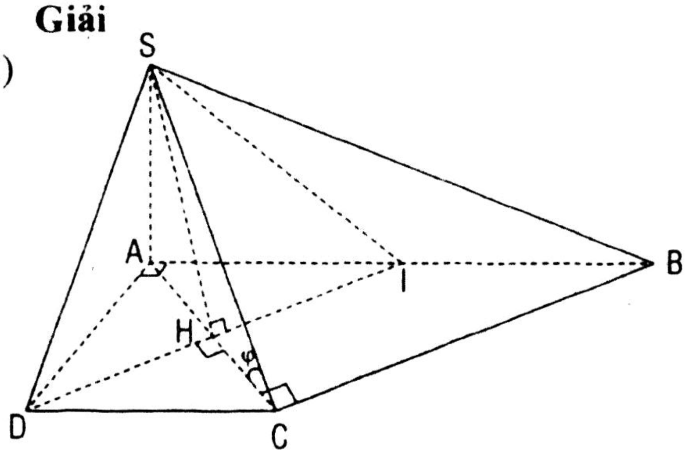
$\Rightarrow$(BHK) $\perp$(SBC) (đpcm)

Bài 18: Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D, có AB = 2a; AD = CD = a; SA $\perp$ (ABCD); SA = a.

1. Chứng minh rằng: (SAD) $\perp$ (SDC); (SAC) $\perp$ (SBC).
2. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD). Tính $\tan\varphi$.

Giải

1. * *Chứng minh* (SAD) $\perp$ (SDC)



Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases}$

$\Rightarrow CD \perp (SAD)$

Mặt khác ta có:

$CD \subset (SDC)$

$\Rightarrow (SAD) \perp (SDC)$ (đpcm).

* *Chứng minh* (SAC) $\perp$ (SBC).

Gọi I là trung điểm của cạnh AB

$\Rightarrow$ Tứ giác BCDI là hình bình hành; tam giác ADI vuông cân tại A; tứ giác AICD là hình vuông.

$\Rightarrow BC // DI; AC \perp DI \Rightarrow AC \perp BC$ (1)

Mặt khác ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $BC \perp (SAC)$

Ta có $BC \subset (SBC)$

$\Rightarrow (SAC) \perp (SBC)$ (đpcm).

2. Ta có $AC \perp BC \Rightarrow CS \perp BC$ (định lí ba đường vuông góc).

$\Rightarrow \varphi = \widehat{SCA}$

$$\Rightarrow \tan\varphi = \tan\widehat{SCA} = \frac{SA}{CA} = \frac{a}{a.\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

6. Bài toán 6: Thiết diện của hình đa diện cắt bởi mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng; vuông góc với một mặt phẳng.

***Phương pháp*:**

1. Để xác định thiết diện của hình đa diện cắt bởi mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng ta dùng tính chất sau:

"*Nếu mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng a thì mặt phẳng (P) sẽ chứa hoặc song song với các đường thẳng vuông góc với a*".

Khi đó chuyển bài toán về xác định thiết diện của hình diện cắt bởi mặt phẳng chứa đường thẳng hoặc song song với đường thẳng (đã xét trong quan hệ song song)

2. Để xác định thiết diện của hình đa diện cắt bởi mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng ta dùng các tính chất sau:

- "***Nếu mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) sẽ chứa hoặc song song với các đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (Q)***".

- *"Nếu mặt phẳng (P) $\perp$ (Q); M $\in$ (P); đường thẳng a qua M; a $\perp$ (Q) thì đường thẳng a chứa trong mặt phẳng (P)".*

Khi đó chuyển bài toán về xác định thiết diện của hình diện cắt bởi mặt phẳng chứa đường thẳng; song song với đường thẳng (đã xét trong quan hệ song song) hoặc mặt phẳng (P) trùng với mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

Ví dụ:

Bài 1: Cho hình chóp S.ABCD; biết ABCD là hình vuông cạnh a, SA $\perp$ (ABCD), $SA = a\sqrt{3}$

1. Xác định giao tuyến của (SAC) và (SBD).
2. a. Chứng minh ΔSBC; ΔSCD là những tam giác vuông.

   b. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (SBD). Chứng minh H là trực tâm ΔSBD và $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AD^2}$
3. Điểm M trên cạnh AB,đặt AM = x ($0 < x < a$). Mặt phẳng α qua M và vuông góc với AB. Xác định thiết diện của hình chóp S.ABC cắt bởi mặt phẳng α, thiết diện là hình gì. Tính diện tích thiết diện theo a, x. Tìm x để diện tích này lớn nhất.

Giải

1. Gọi O là giao điểm của AC; BD $\Rightarrow$ $SO = (SAC) \cap (SBD)$

2. a. + Ta có $CD \perp AD \Rightarrow CD \perp SD \Rightarrow \Delta SCD$ là tam giác vuông tại D

+ Ta có $CB \perp AB \Rightarrow CB \perp SB \Rightarrow \Delta SBC$ là tam giác vuông tại B

b. + Ta có $BD \perp (SAH) \Rightarrow BD \perp SH$ (1)

Ta có $AB \perp SD$ và $AH \perp SD$

$\Rightarrow SD \perp (ABH) \Rightarrow SD \perp BH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra H là trực tâm ΔSBD

+ ΔABD vuông tại A nên ta có $\dfrac{1}{AO^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AD^2}$ (3)

+ ΔSAO vuông tại A có đường cao AH nên $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AO^2} + \dfrac{1}{AS^2}$ (4)

Thay (3) vào (4) ta được: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AD^2} + \dfrac{1}{AS^2}$ (đpcm)

3. + Ta có $BC \perp AB$ ($AD \perp AB$); $SA \perp AB$

Mặt khác B; A không thuộc mặt phẳng α nên BC; SA song song mặt phẳng α, mặt phẳng α cắt các cạnh AC, SC, SB lần lượt tại N, P, Q thoả mãn MN // BC, NP // SA, MQ // SA.

Vậy thiết diện của hình chóp S.ABC cắt bởi mặt phẳng α là tứ giác MNPQ

Ta có $\begin{cases} NP // SA \\ MQ // SA \end{cases} \Rightarrow NP // MQ$ (a)

Mặt khác ta có:

$BC // \alpha$; $BC \subset (ABC)$; $MN = (ABC) \cap \alpha$;

$BC \subset (SBC)$; $PQ = (SBC) \cap \alpha$

Do đó $\begin{cases} MN // BC \\ PQ // BC \end{cases} \Rightarrow MN // PQ$ (b)

Ta có $BC \perp SA$ (c)

Từ (a); (b); (c) suy ra: Tứ giác MNPQ là hình chữ nhật.

+ Diện tích S của thiết diện MNPQ là: S = MN.MQ

Ta có MQ // SA nên $MQ = \dfrac{BM.SA}{BA} = (a - x)\sqrt{3}$

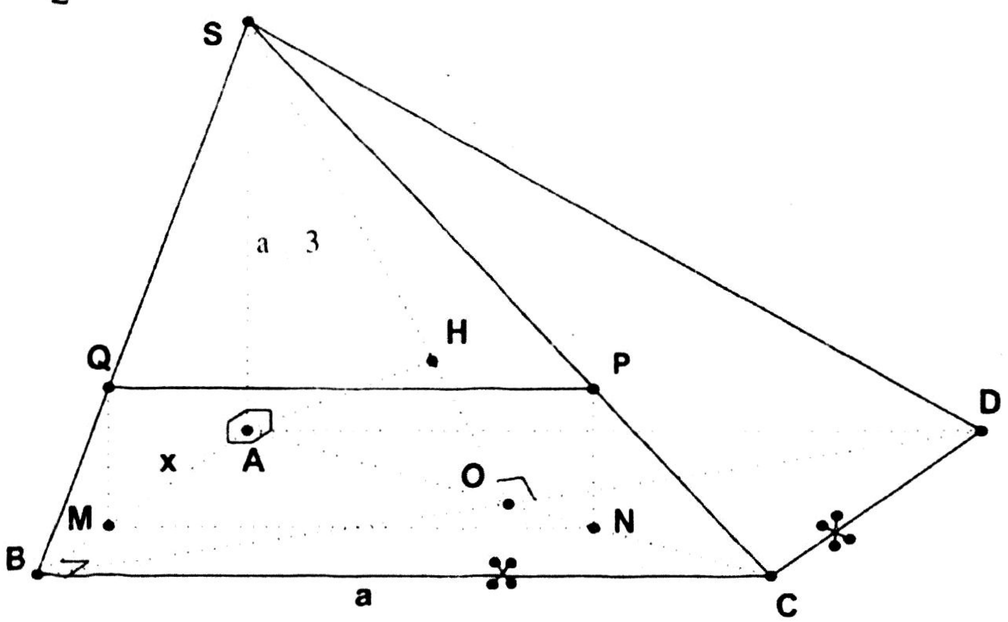
Ta có MN // BC nên $MN = \dfrac{AM.BC}{BA} = x$

$\Rightarrow S = x.(a - x)\sqrt{3} \le \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (*)

Bất đẳng thức (*) xảy ra dấu "=" $\Leftrightarrow x = a - x \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2}$

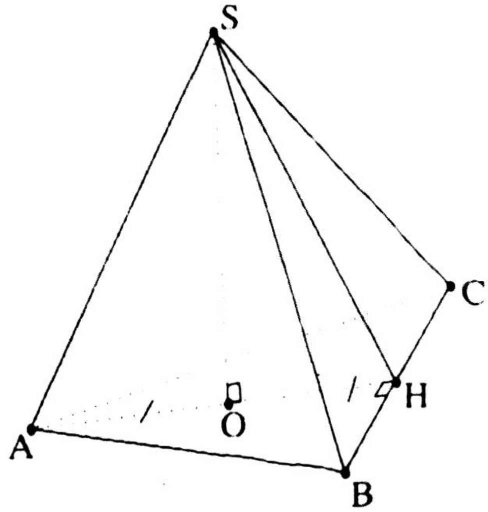
Vậy: Diện tích S của thiết diện MNPQ đạt giá trị lớn nhất là $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2}$



Bài 2: Cho ΔABC đều có đường cao AH = 2a. Gọi O là trung điểm đoạn thẳng AH; trên đường thẳng vuông góc mặt phẳng (ABC) tại O lấy điểm S sao cho SO = 2a. Gọi I là điểm trên đoạn thẳng AH (I không trùng với A; H). Đặt AI = x (O < x < 2a). Mặt phẳng (P) qua I và (P) $\perp$ OH.

1. Xác định thiết diện của hình chóp S.ABC cắt bởi mặt phẳng (P). Tính chất của thiết diện này.
2. Tính diện tích thiết diện câu 1.



Giải

1. Ta có SO $\perp$ (ABC); OH $\subset$ (ABC)

$\Rightarrow$ SO $\perp$ OH

Ta có (P) $\perp$ OH.

Mặt khác ta có: BC $\perp$ OH

Mà B; C không thuộc (P)

Do đó ta có $\begin{cases} BC // (P) \\ SO \subset (P) \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} BC // (P) \\ SO // (P) \end{cases}$

Điểm I trên đoạn thẳng AH (I không trùng với A; H).

$\Rightarrow$ I thuộc đoạn thẳng AO (I không trùng với A) hoặc I thuộc đoạn thẳng OH (I không trùng với H).

\+ *Trường hợp1:* Điểm I $\equiv$ O

Khi đó mặt phẳng (P) chứa SO và (P) // BC.

Ta có BC $\subset$ (ABC); (P) // BC và (P) $\cap$ (ABC) = On

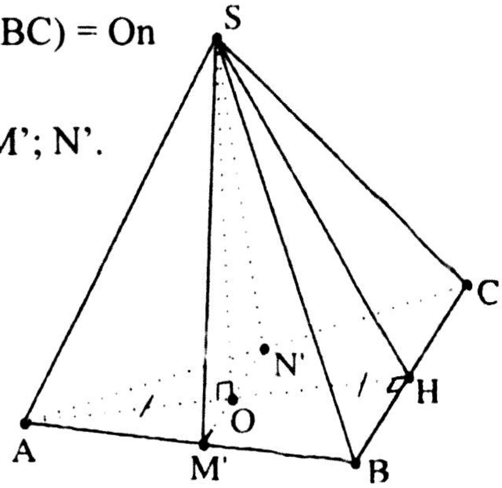
$\Rightarrow$ On // BC.

Đường thẳng On cắt AB; AC lần lượt tại M'; N'.

Ta có SM' = (P) $\cap$ (ABS);

SN'= (P) $\cap$ (ASC)

Thiết diện của hình chóp S.ABC cắt bởi mặt phẳng (P) là tam giác SM'N'.



Tính chất của thiết diện:

Ta có O là trung điểm của đoạn thẳng AH và M'N' // BC

$\Rightarrow$ M'; N' lần lượt là trung điểm của cạnh AB; AC.

Mặt khác ta có: ΔABC đều nên AH là trung trực của cạnh BC; O $\in$ AH.

$\Rightarrow$ OB = OC $\Rightarrow$ SB = SC.

$\Delta SAB = \Delta SAC$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{SAM'} = \widehat{SAN'}$

Ta có $AH = AB.\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2a = AB.\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow AB = \frac{4a.\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow BC = AC = AB = \frac{4a.\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow AM' = AN' = \frac{AB}{2} = \frac{2a.\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \Delta SAM' = \Delta SAN'$ (c.g.c) $\Rightarrow SM' = SN'$

$\Rightarrow$ Thiết diện của hình chóp S.ABC cắt bởi mặt phẳng (P) là tam giác SM'N' cân tại S.

+ *Trường hợp 2:* Điểm I thuộc đoạn thẳng OH (I không trùng với O; H).

Khi đó mặt phẳng (P) qua điểm I và (P) // BC; (P) // SO.

Ta có $BC \subset (ABC)$; (P) // BC; $(P) \cap (ABC) = Im$

$\Rightarrow$ Im // BC.

Đường thẳng Im cắt AB; AC lần lượt tại M; N

$\Rightarrow$ MN // BC (1)

Ta có $SO \subset (AHS)$; (P) // SO; $(P) \cap (AHS) = It$

$\Rightarrow$ It // SO

Đường thẳng It cắt SH tại T.

Ta có BC // (P); $BC \subset (SBC)$; $(P) \cap (SBC) = Ty$

$\Rightarrow$ Ty // BC.

Đường thẳng Ty cắt SB; CS lần lượt tại K; R.

$\Rightarrow$ KR // BC (2)

Vậy: Thiết diện của hình chóp S.ABC cắt bởi mặt phẳng (P) là tứ giác MNRK.

Tính chất của thiết diện:

Ta có $\Delta SAB = \Delta SAC$(c.c.c) $\Rightarrow \widehat{SBA} = \widehat{SCA} \Rightarrow \widehat{MBK} = \widehat{NCR}$ (a)

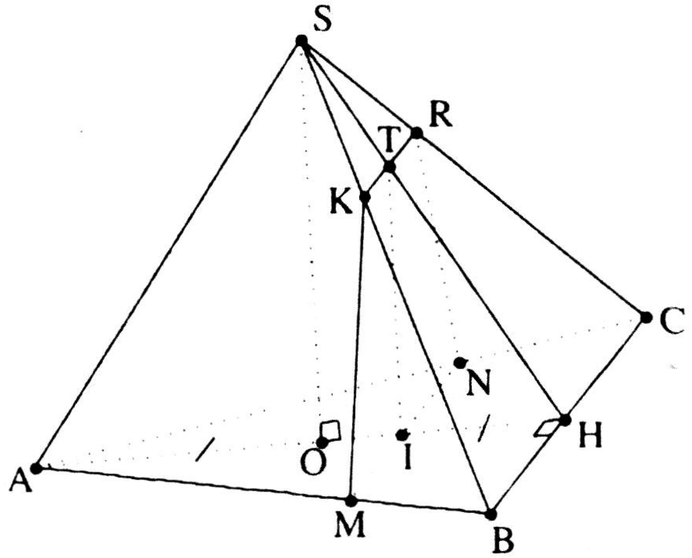
Ta có MN // BC $\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow AM = AN$ (vì AB = AC) (b)

Ta có KR // BC $\Rightarrow \frac{BK}{BS} = \frac{RC}{SC} \Rightarrow BK = RC$ (c)

Từ (a); (b); (c) suy ra : $\Delta MBK = \Delta NCR$(c.g.c)

$\Rightarrow KM = RN$ (3)

Từ (1); (2); (3) suy ra: Thiết diện của hình chóp S.ABC cắt bởi mặt phẳng (P) là hình thang cân MNRK (KR // MN; KM = RN)



+ *Trường hợp 3:*

Điểm I thuộc đoạn thẳng AO(điểm I không trùng A; O)

Khi đó mặt phẳng (P)đi qua điểm I và (P) // SO; (P) // BC.

Ta có BC $\subset$(ABC); (P) // BC và (P) $\cap$(ABC) = In'

$\Rightarrow$ In' // BC.

Đường thẳng In' cắt AB; AC lần lượt tại M_1; N_1.

Ta có SO $\subset$(AHS); (P) // SO; (P) $\cap$(AHS) = It'

$\Rightarrow$ It' // SO

Đường thẳng It' cắt SA tại T_1 .

Ta có M_1T_1 = (P) $\cap$(SAB); N_1T_1 = (P) $\cap$(SAC)

$\Rightarrow$ Thiết diện của hình chóp S.ABC cắt bởi mặt phẳng (P) là tam giác $T_1M_1N_1$.

Tính chất của thiết diện:

Ta có $\Delta SAB = \Delta SAC$(c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{T_1AM_1} = \widehat{T_1AN_1}$

Ta có M_1N_1 // BC

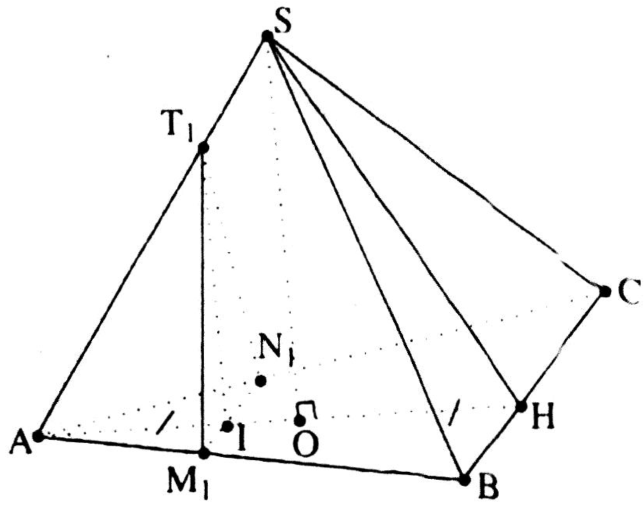
nên $\dfrac{AM_1}{AB} = \dfrac{AN_1}{AC} = \dfrac{M_1N_1}{BC}$

$\Rightarrow AM_1 = AN_1 = M_1N_1$.

(vì AB = AC = BC).

$\Rightarrow \Delta\ T_1AM_1 = \Delta\ T_1AN_1$ (c.g.c)

$\Rightarrow T_1M_1 = T_1N_1$

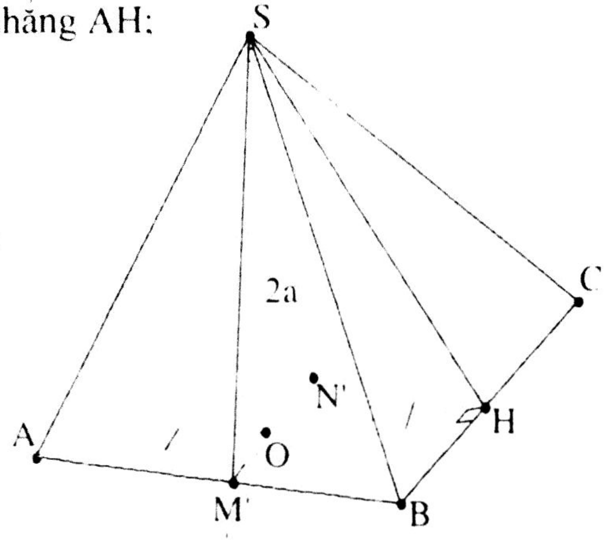


Do đó: Thiết diện của hình chóp S.ABC cắt bởi mặt phẳng (P) là tam giác $T_1M_1N_1$ cân tại T_1.

2. Tính diện tích của thiết diện của hình chóp S.ABC cắt bởi mặt phẳng (P).

+ *Trường hợp 1:* thiết diện của hình chóp S.ABC cắt bởi mặt phẳng (P) là tam giác cân SM'N'

Ta có điểm O là trung điểm đoạn thẳng AH;



M'N' // BC

$\Rightarrow M'N' = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{2a.\sqrt{3}}{3}$

Vậy diện tích thiết diện SM'N' là:

$S_{SM'N'} = \dfrac{1}{2}.M'N'.SO$

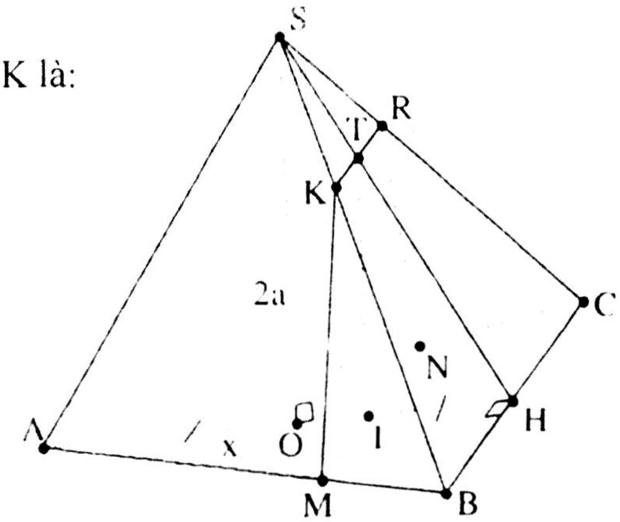
$= \dfrac{1}{2}.\dfrac{2a.\sqrt{3}}{3}.2a$

$= \dfrac{2a^2.\sqrt{3}}{3}$

+ *Trường hợp 2:* thiết diện của hình chóp S.ABC cắt bởi mặt phẳng (P) là hình thang cân MNRK (KR // MN; KM = RN)

Ta có IT // SO; SO $\perp$ MN.

$\Rightarrow$ IT $\perp$ MN.



Vậy: diện tích của thiết diện MNRK là:

$S_{MNRK} = \dfrac{1}{2}(MN + KR).IT$

Ta có MN // BC nên $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AI}{AH}$

$\Rightarrow MN = BC.\dfrac{AI}{AH} = \dfrac{4a.\sqrt{3}}{3}.\dfrac{x}{2a}$

$= \dfrac{2x.\sqrt{3}}{3}$

Mặt khác ta có: IT // SO

$\Rightarrow \dfrac{IT}{SO} = \dfrac{HI}{HO}$

$\Rightarrow IT = SO.\dfrac{AH - AI}{HO} = 2a.\dfrac{2a - x}{a} = 2(2a - x)$

Ta có KR // BC $\Rightarrow \dfrac{KR}{BC} = \dfrac{ST}{SH} = \dfrac{OI}{OH}$

(Với OA = OH = a; OI = AI – AO = x – a).

$$\Rightarrow KR = BC.\frac{OI}{OH} = \frac{4a.\sqrt{3}}{3}.\frac{x-a}{a} = \frac{4(x-a).\sqrt{3}}{3}$$

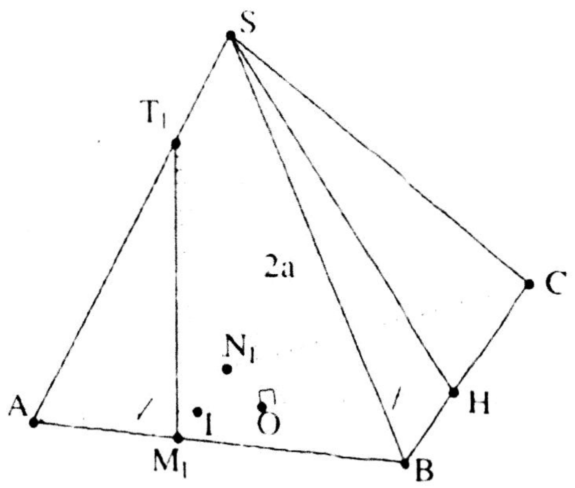
$$\Rightarrow S_{MNRK} = \frac{1}{2}[\frac{2x.\sqrt{3}}{3} + \frac{4(x-a).\sqrt{3}}{3}]2(2a-x) = \frac{(6x-4a)(2a-x)\sqrt{3}}{3}$$

+ *Trường hợp 3:* Thiết diện của hình chóp S.ABC cắt bởi mặt phẳng (P) là tam giác $T_1M_1N_1$ cân tại T_1.

Ta có $IT_1 // SO$; $M_1N_1 \perp SO$

$\Rightarrow M_1N_1 \perp IT_1$

$\Rightarrow$ Diện tích thiết diện $T_1M_1N_1$ là:



$$S_{\Delta T_1M_1N_1} = \frac{1}{2}.M_1N_1.IT_1$$

Ta có IT_1 // SO nên $\frac{IT_1}{SO} = \frac{AI}{AO}$

$$\Rightarrow IT_1 = SO.\frac{AI}{AO} = 2a.\frac{x}{a} = 2x$$

Theo chứng minh trên ta có:

$AM_1 = AN_1 = M_1N_1$

$\Rightarrow$ Tam giác AM_1N_1 đều có đường cao AI = x.

Do đó $AI = \frac{M_1N_1.\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow x = \frac{M_1N_1.\sqrt{3}}{2} \Rightarrow M_1N_1 = \frac{2x.\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta T_1M_1N_1} = \frac{1}{2}.\frac{2x.\sqrt{3}}{3}.2x = \frac{2x^2.\sqrt{3}}{3}$$

Bài 3: Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuôngtại A và D, có AB = 2a; AD = CD = a; SA $\perp$ (ABCD); SA = a. Gọi (P) là mặt phẳng chứa SD và vuông góc với mặt phẳng (SAC).

1. Hãy xác định mặt phẳng (P).
2. Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mặt phẳng(P). Tính theo a diện tích của thiết diện này.

Giải

1. Gọi I là trụng điểm của cạnh AB

$\Rightarrow$ Tứ giác BCDI là hình bình hành; tam giác ADI vuông cân tại A; tứ giác AICD là hình vuông.

$\Rightarrow DI \perp AC$ (1)

Ta có $SA \perp (ABCD)$;

$DI \subset (ABCD)$

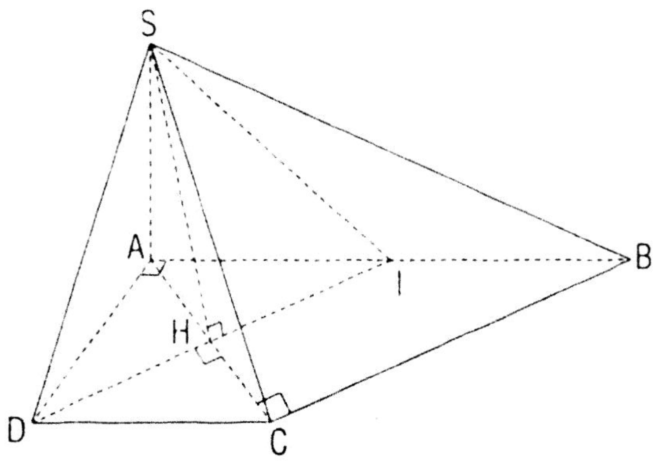
$\Rightarrow DI \perp AS$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$DI \perp (SAC)$

Mặt khác ta có: $D \in (P)$;

$(P) \perp (SAC)$



$\Rightarrow$ (P) chính là mặt phẳng (SDI).

2. Thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mặt phẳng (P) chính là thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mặt phẳng (SDI).

Do đó thiết diện cần tìm là tam giác SDI.

* *Tính diện tích tam giác SDI.*

Ta có $AI = AD = SA = a$; $\widehat{IAD} = \widehat{IAS} = \widehat{SAD} = 90^0$

$\Rightarrow \Delta IAD = \Delta IAS = \Delta DAS \Rightarrow ID = IS = DS = a.\sqrt{2}$

Gọi $H = AC \cap DI$

$\Rightarrow$ SH là đường cao của tam giác đều SDI.

$$\Rightarrow SH = \frac{DI.\sqrt{3}}{2} = \frac{a.\sqrt{6}}{2}$$

$\Rightarrow$ Diện tích tam giác SDI là:

$$S = \frac{1}{2}.SH.DI = \frac{1}{2}.\frac{a.\sqrt{6}}{2}.a.\sqrt{2} = \frac{a^2.\sqrt{3}}{2}$$

Bài 4: Cho hình chóp S.ABC. Biết tam giác ABC vuông ở A; $AB = a$; $BC = 2a$; điểm H thuộc cạnh AC; $HC = \frac{1}{3}.CA$; $SH \perp (ABC)$; $SH = \frac{a.\sqrt{6}}{3}$; hai điểm I, J lần lượt là trung điểm của cạnh BC, SA.

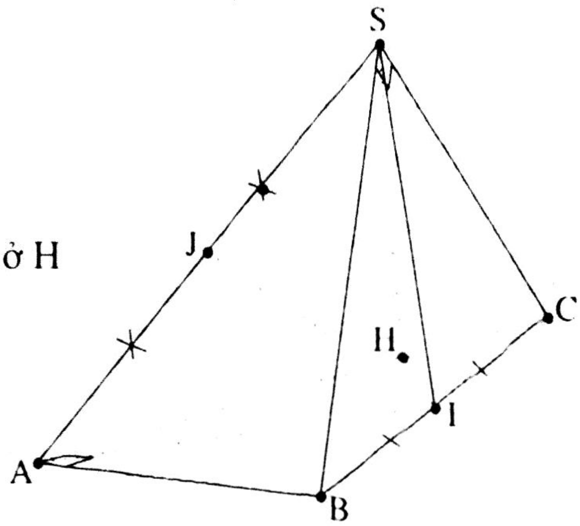
1. Chứng minh rằng: các mặt của hình chóp S.ABC là những tam giác vuông.
2. Dựng và tính diện tích thiết diện của hìnhchóp S.ABC cắt bởi mặt phẳng (P). Biết:
   a. Mặt phẳng (P) đi qua điểm H và $(P) \perp AI$
   b. Mặt phẳng (P) qua BJ và $(P) \perp (SHI)$
   c. Mặt phẳng (P) đi qua điểm I và $(P) \perp BC$.
3. Dựng và tính diện tích thiết diện của hìnhchóp S.ABC cắt bởi mặt phẳng (P). Biết: mặt phẳng (P) qua trung điểm K của đoạn thẳng SH; (P) song song SA và BC.

Giải

1. Ta có tam giác ABC vuông ở A

$\Rightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$

$$\Rightarrow AC = a\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} CH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \\ AH = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$



Mặt khác ta có: tam giác AHS vuông ở H

$\Rightarrow SA^2 = SH^2 + HA^2$

$= (\dfrac{a.\sqrt{6}}{3})^2 + (\dfrac{2a\sqrt{3}}{3})^2 = 2a^2.$

$\Rightarrow SA = a.\sqrt{2}$

Ta có tam giác CHS vuông ở H

$\Rightarrow SC^2 = SH^2 + HC^2 = (\dfrac{a.\sqrt{6}}{3})^2 + (\dfrac{a\sqrt{3}}{3})^2 = a^2.$

$\Rightarrow CS = a$

Ta có tam giác BHS vuông ở H

$\Rightarrow SB^2 = SH^2 + HB^2 = SH^2 + (AB^2 + AH^2)$

$= (\dfrac{a.\sqrt{6}}{3})^2 + a^2 + (\dfrac{2a\sqrt{3}}{3})^2 = 3a^2.$

$\Rightarrow SB = a\sqrt{3}.$

Vậy: $SB^2 + SC^2 = 3a^2 + a^2 = 4a^2$; $BC^2 = 4a^2$

$\Rightarrow SB^2 + SC^2 = BC^2 \Rightarrow \Delta SBC$ vuông ở S.

$SA^2 + SC^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$; $AC^2 = 3a^2$

$\Rightarrow SA^2 + SC^2 = AC^2 \Rightarrow \Delta SAC$ vuông ở S.

$SA^2 + AB^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$; $SB^2 = 3a^2$

$\Rightarrow SA^2 + AB^2 = SB^2 \Rightarrow \Delta SAB$ vuông ở A

Mặt khác theo đề ra ta có ΔABC vuông ở A

Do đó các mặt của hình chóp S.ABC là những tam giác vuông (đpcm).

2. a. Tam giác SBC vuông ở S có I là trung điểm cạnh BC nên ta có:

$SI = \dfrac{BC}{2} = a$

$\Rightarrow CS = CI = SI \Rightarrow \Delta SIC$ đều.

ΔABC vuông ở A có I là trung điểm cạnh BC nên ta có $AI = \dfrac{BC}{2} = a$

Ta có tam giác SHI vuông ở H

$\Rightarrow HI^2 = SI^2 - SH^2 = a^2 - \left(\frac{a.\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{3}$

$\Rightarrow HI = \frac{a.\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow HI^2 + AI^2 = \frac{a^2}{3} + a^2 = \frac{4a^2}{3} = AH^2$

$\Rightarrow \Delta AHI$ vuông ở I $\Rightarrow AI \perp HI$ (1)

Mặt khác ta có: $SH \perp (ABC)$; $AI \subset (ABC)$

$\Rightarrow AI \perp SH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $AI \perp (SHI)$ (a)

Mặt phẳng (P) đi qua điểm H và $(P) \perp AI$ (b)

Từ (a) và (b) suy ra : $(P) \equiv (SHI)$.

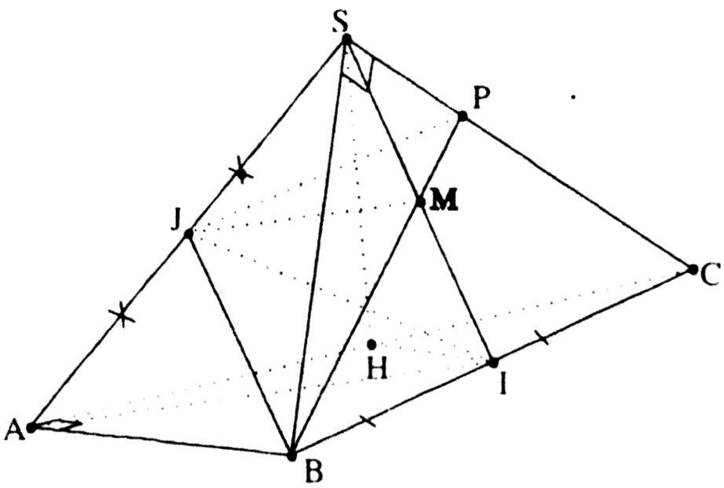
Khi đó thiết diện của hình chóp S.ABC cắt bởi mặt phẳng (P) là tam giác SHI.

* Diện tích thiết diện SHI. là:

$S_{\Delta SHI} = \frac{1}{2}.SI.HI$

$= \frac{1}{2}.\frac{a.\sqrt{6}}{3}.\frac{a.\sqrt{3}}{3}$

$= \frac{a^2.\sqrt{2}}{6}$



b. Mặt phẳng (P) qua BJ và $(P) \perp (SHI)$.

Ta có $AI \perp (SHI)$

$\Rightarrow (SAI) \perp (SHI)$.

Mặt khác ta có: $(SAI) \cap (SHI) = SI$.; $J \in (SAI)$

Gọi M là hình chiếu vuông góc của J trên SI.

$\Rightarrow JM \perp SI \Rightarrow JM \perp (SHI)$ (c).

Ta có $J \in (P)$; $(P) \perp (SHI)$ (d).

Từ (c) và (d) suy ra: $M \in (P)$

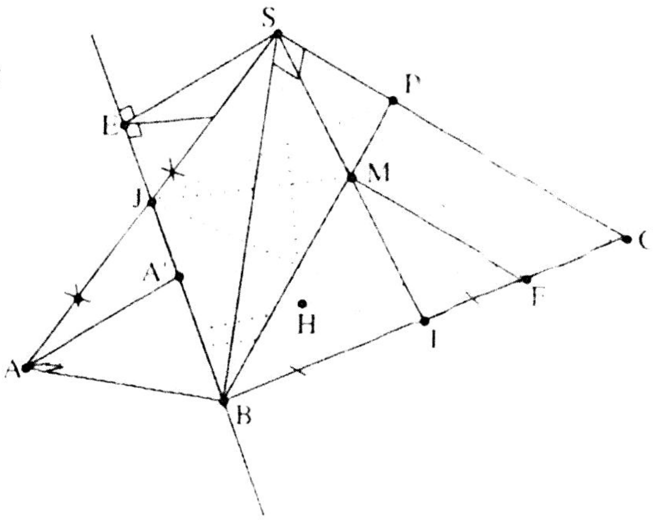
Vậy $(P) \equiv (BJM)$

Gọi P là giao điểm của BM và CS

$\Rightarrow$ Thiết diện của hình chóp S.ABC cắt bởi mặt phẳng (P) là tam giác BJP.

* *Tính diện tích thiết diện BJM.*

Gọi E là hình chiếu vuông góc của P trên đường thẳng BJ



$\Rightarrow$ Diện tích thiết diện BJP là:

$$S_{\Delta BJP} = \frac{1}{2}.BJ.PE\ (*)$$

$$BJ^2 = AJ^2 + AB^2$$

$$= (\frac{SA}{2})^2 + a^2 = \frac{6a^2}{4}.$$

$$\Rightarrow BJ = \frac{a.\sqrt{6}}{2}$$

\+ Ta có $CS \perp SB$; $CS \perp SA$

$\Rightarrow CS \perp (SAB)$

Ta có $SE \subset (SAB)$

$\Rightarrow CS \perp SE \Rightarrow PS \perp SE$

$\Rightarrow PE^2 = SE^2 + SP^2$ (I)

Gọi A' là hình chiếu vuông góc A trên đường thẳng BJ

$\Rightarrow \Delta AA'J = \Delta SEJ$ (g.c.g) $\Rightarrow SE = A'A$

Mặt khác ta có: ΔABJ vuông tại A có đường cao AA' nên $AA' = \frac{AB.AJ}{BJ}$

$$\Rightarrow AA' = \frac{AB.AJ}{\sqrt{AB^2 + AJ^2}} = \frac{a.\frac{a.\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{a^2 + (\frac{a.\sqrt{2}}{2})^2}}$$

$$\Rightarrow AA' = \frac{a.\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SE = \frac{a.\sqrt{3}}{3}\ (II)$$

Xét tam giác SBI

Ta có $JM \perp (SHI)$; $AI \perp (SHI)$; $J \notin AI \Rightarrow JM // AI$

Mặt khác ta có: J là trung điểm của cạnh SA nên M là trung điểm của cạnh SI

$\Rightarrow$ tam giác SBI có đường trung tuyến BM

$$\Rightarrow BM^2 = \frac{BI^2 + BS^2}{2} - \frac{SI^2}{4} = \frac{a^2 + 3a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{7a^2}{4}$$

$$\Rightarrow BM = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

Gọi F là trung điểm của đoạn thẳng IC

$$\Rightarrow \frac{BM}{BP} = \frac{BF}{FC} = \frac{3}{4} \Rightarrow BP = \frac{4}{3}.BM = \frac{4}{3}.\frac{a\sqrt{7}}{2} = \frac{2a.\sqrt{7}}{3}$$

Mặt khác ta có: tam giác BSP vuông tại S

$$\Rightarrow SP^2 = BP^2 - SB^2 = (\frac{2a.\sqrt{7}}{3})^2 - 3a^2 = \frac{a^2}{9} \Rightarrow SP = \frac{a}{3} \text{ (III)}$$

Thay (II); (III) vào (I) ta được:

$$PE^2 = \frac{3a^2}{9} + \frac{a^2}{9} = \frac{4a^2}{9} \Rightarrow PE = \frac{2.a}{3}$$

Do đó từ (*) ta có: $S_{\Delta BJP} = \frac{1}{2}.BJ.PE = \frac{1}{2}.\frac{a.\sqrt{6}}{2}.\frac{2.a}{3} = \frac{a^2.\sqrt{6}}{6}$

c. Mặt phẳng (P) đi qua điểm I và (P) $\perp$ BC.

Ta có $HI = \frac{a.\sqrt{3}}{3} = HC \Rightarrow \Delta IHC$ cân tại H $\Rightarrow$ HF $\perp$ BC

Mặt khác ta có: SH $\perp$ BC $\Rightarrow$ BC $\perp$ (SHF)

$\Rightarrow$ Mặt phẳng (P) đi qua điểm I và (P) //(SHF).

- Ta có (ABC) $\cap$ (SHF) = HF; (ABC) $\cap$ (P) = It $\Rightarrow$ It // HF.

Gọi R = It $\cap$ AC $\Rightarrow$ IR// FH

Mặt khác ta có: F là trung điểm của đoạn thẳng IC $\Rightarrow$ H là trung điểm của đoạn thẳng RC.

$\Rightarrow$ R là trung điểm của đoạn thẳng AH (vì $CH = \frac{1}{3}CA$)

+ Ta có (SAC) $\cap$ (SHF) = SH; (SAC) $\cap$ (P) = Rx $\Rightarrow$ Rx // SH

$\Rightarrow$ Rx cắt SA tại trung điểm của đoạn thẳng SA.

+ Ta có (SBC) $\cap$ (SHF) = SF;

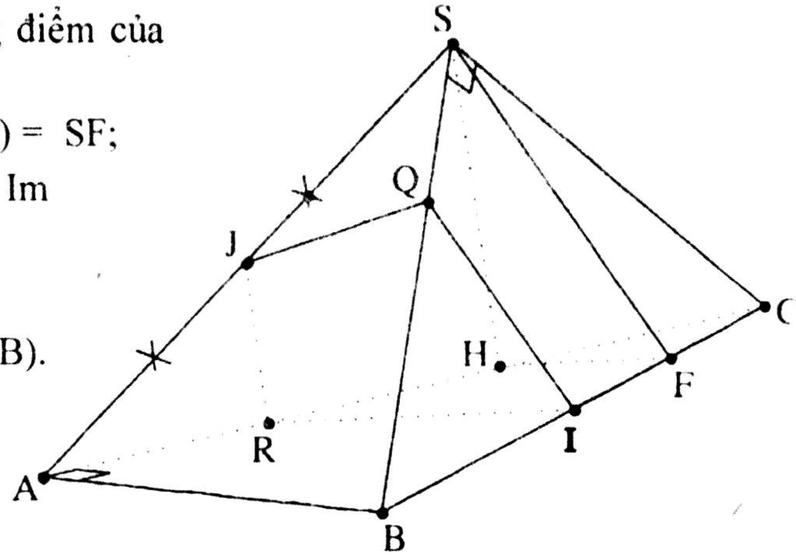
(SBC) $\cap$ (P) = Im

$\Rightarrow$ Im // SF

Gọi Q = Im $\cap$ SB.

Khi đó JQ = (P) $\cap$ (SAB).

$\Rightarrow$ Thiết diện của hình chóp S.ABC cắt bởi mặt phẳng (P) là tứ giác IRJQ



Diện tích của thiết diện IRJQ là:

$$S_{IRJQ} = S_{\Delta IRJ} + S_{\Delta JQI}$$

(với $S_{\Delta IRJ}$ là diện tích của tam giác IRJ)

Mặt khác ta có JR // SH; RI // HF; SH $\perp$ HF.

$\Rightarrow$ JR $\perp$ RI

$$\Rightarrow S_{\Delta IRJ} = \frac{1}{2}.JR.RI$$

Ta có R; J lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AH; SA

$$\Rightarrow JR = \frac{1}{2}.SH = \frac{a.\sqrt{6}}{6}$$

Ta có $RI = 2HF = 2\sqrt{SF^2 - SH^2}$

$$= 2\sqrt{\frac{3a^2}{4} - (\frac{a.\sqrt{6}}{3})^2} = \frac{a.\sqrt{3}}{3}$$

(vì tam giác SIC đều nên $SF = IC.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = a.\frac{\sqrt{3}}{2}$)

$$\Rightarrow S_{\Delta IRJ} = \frac{1}{2}.\frac{a.\sqrt{6}}{6}.\frac{a.\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2.\sqrt{2}}{12}$$

Ta có $(P) \perp BC$; $JQ \subset (P) \Rightarrow BC \perp JQ$.

Mặt khác ta có: $CS \perp (SAB)$; $JQ \subset (P) \Rightarrow CS \perp JQ$.

Do đó $JQ \perp (SBC)$

Ta có $IQ \subset (SBC) \Rightarrow JQ \perp IQ$.

Mặt khác ta có: QI //SF $\Rightarrow \frac{QI}{SF} = \frac{BI}{BF} = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow QI = SF.\frac{2}{3} = a.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{2}{3} = \frac{a.\sqrt{3}}{3} = RI$$

Hai tam giác vuông IRJ; IQJ có JI cạnh chung; QI = RI

$\Rightarrow \Delta IRJ = \Delta IQJ \Rightarrow S_{\Delta IRJ} = S_{\Delta JQI}$

$$\Rightarrow S_{IRJQ} = S_{\Delta IRJ} + S_{\Delta JQI}$$

$$= 2S_{\Delta IRJ} = 2.\frac{a^2.\sqrt{2}}{12} = \frac{a^2.\sqrt{2}}{6}$$

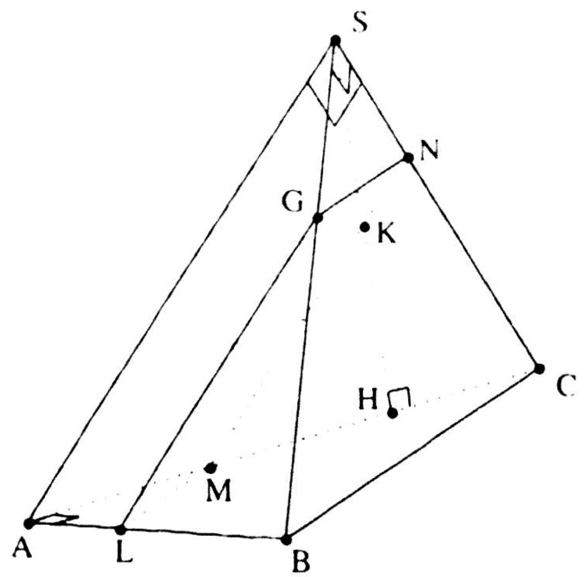
3. Dựng và tính diện tích thiết diện của hìnhchóp S.ABC cắt bởi mặt phẳng (P). Biết: mặt phẳng (P) qua trung điểm K của đoạn thẳng SH; (P) song song SA và BC.

+ Ta có K $\in$ (P); (P) //SA; SA $\subset$ (SAC); (SAC) $\cap$ (P) = Kx

$\Rightarrow$ Kx // SA

Gọi M= Kx $\cap$ AC; N = Kx $\cap$ CS.

$\Rightarrow$ MN // SA.



+ Ta có (P) // BC; BC $\subset$ (ABC);

(ABC) $\cap$ (P) = Mm;

BC $\subset$ (SBC);

(SBC) $\cap$ (P) = Ny.

$\Rightarrow$ Mm //BC; Ny //BC.

Gọi L = Mm $\cap$ AB; G = Ny $\cap$ SC

$\Rightarrow$ ML // BC; NG // BC;

LG = (SAB) $\cap$ (P)

$\Rightarrow$ LG // SA (vì SA // (P);

SA $\subset$ (ABS).

$\Rightarrow$ Thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mặt phẳng (P) là tứ giác MNGL.

Mặt khác ta có:

ML // BC; NG // BC $\Rightarrow$ ML // NG

LG // SA; MN // SA $\Rightarrow$ LG // MN

Do đó thiết diện cần tìm là hình bình hành MNGL

**** Tính diện tích của thiết diện MNGL***

Dện tích của thiết diện MNGL là:

$S_{MNGL} = MN.NG.\sin\widehat{MNG}$

Trong mặt phẳng (SAC) dựng hình bìnhhành ASCC'. Khi đó ta có:

$\widehat{MNG} = \widehat{C'CB}$

Ta có SA $\perp$ CS; AC' // CS

$\Rightarrow$ SA $\perp$ AC'

Mặt khác ta có: SA $\perp$ AB (vì tam giác SAB vuông tại A)

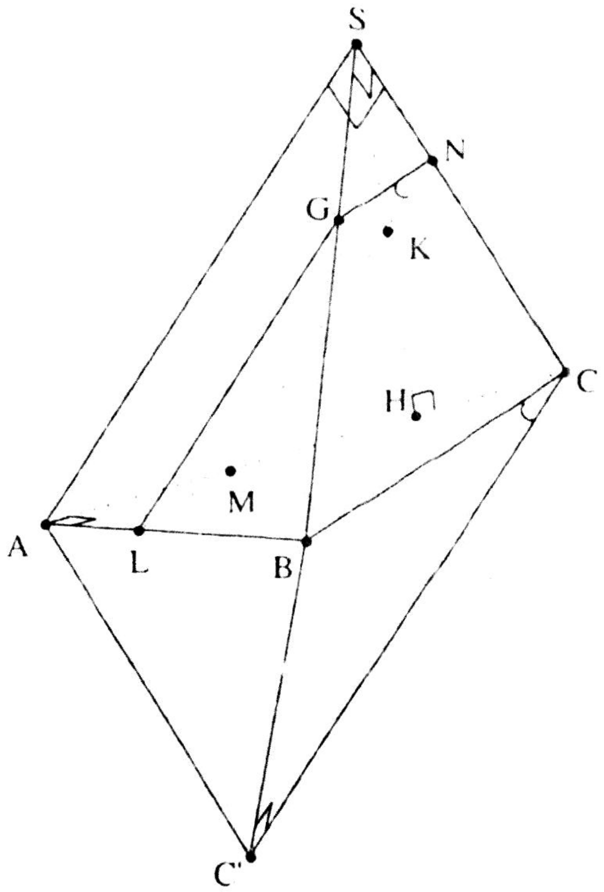
$\Rightarrow$ SA $\perp$ (ABC').

Ta có C'C // SA

$\Rightarrow$ C'C $\perp$ (ABC').

$\Rightarrow$ C'C $\perp$ C'B

$\Rightarrow$ Tam giác BC'C vuông tại C'.



$$\Rightarrow \cos\widehat{C'CB} = \frac{CC'}{CB} = \frac{SA}{CB}$$

$$= \frac{a.\sqrt{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{C'CB} = 45^0$$

$$\Rightarrow S_{MNGL} = MN.NG.\sin45^0$$

Ta có MN // SA

$$\Rightarrow \frac{MN}{SA} = \frac{CM}{CA}$$

$$\Rightarrow MN = SA.\frac{CM}{CA}$$

Mặt khác ta có:

$$\widehat{SAC} + \widehat{SCA} = 90^0 = \widehat{KMH} + \widehat{MKH}.$$

Mà $\widehat{SAC} = \widehat{KMH}$

$$\Rightarrow \widehat{SCA} = \widehat{MKH}$$

$\Rightarrow$ ΔSHC; ΔMHK đồng dạng với nhau.

$$\Rightarrow \frac{MH}{SH} = \frac{HK}{HC} = \frac{\frac{SH}{2}}{HC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow MH = SH.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a.\sqrt{3}}{3} = HC$$

$$\Rightarrow MC = 2.HC = \frac{2a.\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow MN = SA.\frac{CM}{CA} = a\sqrt{2}.\frac{\frac{2a.\sqrt{3}}{3}}{a.\sqrt{3}} = \frac{2a.\sqrt{2}}{3}$$

Ta có NG = ML; ML //BC

$$\Rightarrow \frac{ML}{BC} = \frac{AM}{AC} = \frac{AC - CM}{AC}$$

$$= 1 - \frac{CM}{CA} = 1 - \frac{\frac{2a.\sqrt{3}}{3}}{a.\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow ML = \frac{1}{3}.BC = \frac{2a}{3}$$

$$\Rightarrow NG = \frac{2a}{3}$$

$$\Rightarrow S_{MNGL} = MN.NG.\sin 45^0$$

$$= \frac{2a.\sqrt{2}}{3}.\frac{2a}{3}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4a^2}{9}$$

7. Bài toán 7: Xác định góc giữa hai mặt phẳng; các loại khoảng cách

Chú ý:

a. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) (a không vuông góc với (P)) là góc giữa đường thẳng a và hình chiếu vuông góc của a trên (P))

b. Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

****Phương pháp:* Xác định góc giữa hai mặt phẳng (P); (Q).**

Phương pháp 1: dùng định nghĩa

+ Xác định a $\perp$(P); b $\perp$(Q).

+ Tính góc giữa góc giữa hai đường thẳng a; b.

+ Kết luận: Góc vừa tính là góc giữa hai mặt phẳng (P); (Q).

Phương pháp 2:

((P); (Q) song song hoặc trùng nhau ta có góc giữa hai mặt phẳng (P); (Q) bằng 0^0. Trong phương pháp này ta chỉ xét hai mặt phẳng (P); (Q) cắt nhau).

+ Tìm mặt phẳng (R) $\perp$ d = (P) $\cap$ (Q).

+ Xác định các giao tuyến $\begin{cases} d_1 = (P) \cap (R) \\ d_2 = (Q) \cap (R) \end{cases}$

+ Xác định góc giữa d_1; d_2

+ Kết luận: Góc vừa tính là góc giữa hai mặt phẳng (P); (Q).

Phương pháp 3:

+ Gọi S là diện tích của một đa giác trong mặt phẳng (P); S' là diện tích của hình chiếu của đa giác đó trên mặt phẳng (Q). Ta có $S' = S.\cos\varphi$ (*), trong đó φ là góc giữa hai mặt phẳng (P); (Q).

+ Dựa vào công thức (*) để tính $\cos\varphi$ rồi suy ra góc φ

+ Kết luận φ là góc giữa hai mặt phẳng (P); (Q).

***Phương pháp:* Xác định khoảng cách (khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng; khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng; khoảng cách giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song; khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau)**

a. Phương pháp: Tìm khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ

+ Tìm hình chiếu vuông góc H của M trên đường thẳng Δ.

+ Kết luận: $d(M; \Delta) = MH$

b. Phương pháp: Tìm khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P)

Phương pháp1:

+ Tìm mặt phẳng (Q) chứa điểm M; $(Q) \perp (P)$; $d = (P) \cap (Q)$.

+ Tìm hình chiếu vuông góc H của M trên đường thẳng d. Khi đó $MH \perp (P)$; $H \in (P)$.

+ Kết luận: $d(M; (P)) = MH$

Phương pháp 2:

+ Tìm a chứa M; A và a // (P)

+ Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P)

+ Kết luận $d(M; (P)) = d(A; (P))$

- Khoảng cách giữa một đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a bằng khoảng cách từ một điểm M bất kì thuộc a đến mặt phẳng (P).

- Khoảng cách giữa hai mặt phẳng mặt phẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm M bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

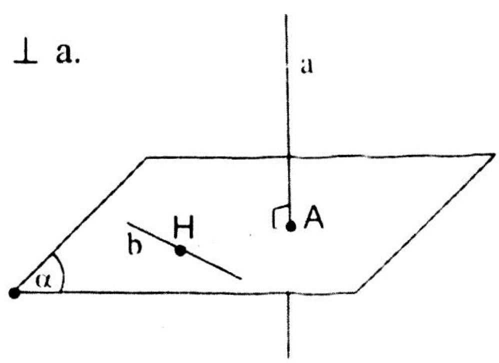
c. *Phương pháp: Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a; b*

Phương pháp1: (khi $a \perp b$)

+ Xác định mặt phẳng α chứa b và $\alpha \perp a$.

+ Xác định giao điểm A của a và α; tìm hình chiếu vuông góc H của A trên b. Khi đó đoạn AH là đoạn vuông góc chung của a; b.

+ Kết luận $AH = d(a; b)$.



Phương pháp 2:

+ Tìm khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) (mặt phẳng (P) chứa đường thẳng b và (P) // a).

+ Kết luận khoảng cách vừa tìm là khoảng cách giữa hai đường thẳng a; b

Phương pháp 3:

+ Tìm khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng a; b

+ Kết luận khoảng cách vừa tìm là khoảng cách giữa hai đường thẳng a; b

Phương pháp 4:

+ Xác định đoạn vuông góc chung của a;b.

+ Tính độ dài đoạn vuông góc chung của a;b.

+ Kết luận độ dài vừa tìm là khoảng cách giữa hai đường thẳng a; b.

***Lưu ý:** Dựng đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a; b.

Phương pháp 1: (Áp dụng cho trường hợp đặc biệt a $\perp$ b).

+ Xác định mặt phẳng α chứa b và $\alpha \perp$ a.

+ Xác định giao điểm A của a và α ; tìm hình chiếu vuông góc H của A trên b.

+ Kết luận: đoạn AH là đoạn vuông góc chung của a;b.

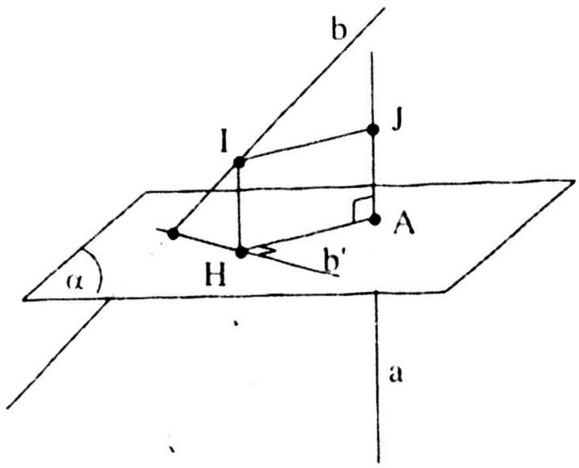
Phương pháp 2:

+ Dựng mặt phẳng α vuông góc với đường thẳng a tại A.

+ Xác định hình chiếu vuông góc b' của b trên mặt phẳng α

+ Xác định hình chiếu vuông góc H của A trên b'.

+ Xác định điểm I trên đường thẳng b có hình chiếu vuông góc trên b' là điểm H (IH // a)



+ Trong mặt phẳng xác định hai đường thẳng song song IH; a dựng đường thẳng song song AH, đường thẳng này cắt a tại J.

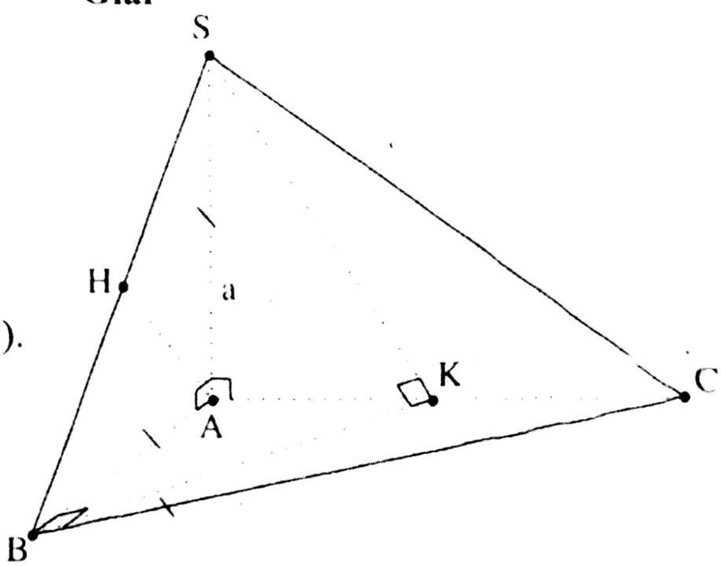
+ Kết luận: Đoạn thẳng IJ là đoạn vuông góc chung của a; b. (Ta có JI = AH)

Ví dụ:

Bài 1: Cho hình chóp S.ABC; AB = a; SA $\perp$ (ABC); SA = a; tam giác ABC vuông cân tại B.

1. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).
2. Xác định góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC).

Giải



1. Ta có SA $\perp$ (ABC)

$\Rightarrow$ SA $\perp$ BC

Mặt khác ta có: AB $\perp$ BC

$\Rightarrow$ BC $\perp$ (ABS)

$\Rightarrow$ (SBC) $\perp$ (ABS)

Ta có SB = (SBC) $\cap$ (ABS).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB

$\Rightarrow$ AH $\perp$ BS

$\Rightarrow$ AH $\perp$ (SBC)

$\Rightarrow$ d(A; (SBC)) = AH.

* Tính khoảng cách d(A; (SBC)) từ A đến mặt phẳng (SBC).

Ta có:

$$d(A;(SBC)) = AH = \frac{SB}{2} = \frac{a.\sqrt{2}}{2}$$

(vì tam giác SAB vuông cân tại A)

Chú ý: Có thể tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng các cách sau:

a. $d(A;(SBC)) = AH = \dfrac{SA.AB}{SB} = \dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}}$

b. d(A; (SBC)) = AH với AH được xác định bởi đẳng thức:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2}$$

2. Xác định góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC).

Ta có SA $\perp$ (ABC) $\Rightarrow$ (SAC) $\perp$ (ABC)

Ta có AC = (SAC) $\cap$ (ABC).

Gọi K là hình chiếu vuông góc của B trên AC.

$\Rightarrow BK \perp AC \Rightarrow BK \perp (SAC)$

$\Rightarrow$ SK là hình chiếu vuông góc của SB trên mặt phẳng (SAC).

Vậy góc $\widehat{BSK} = \varphi$ là góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC).

Ta có $\tan\varphi = \dfrac{BK}{SK}$

- Mặt khác ta có: tam giác ABC vuông cân tại B nên K là trung điểm của cạnh AC

$\Rightarrow KB = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a.\sqrt{2}}{2} = AK$

Ta có $SK^2 = SA^2 + AK^2 = a^2 + (\dfrac{a.\sqrt{2}}{2})^2 = \dfrac{6.a^2}{4}$

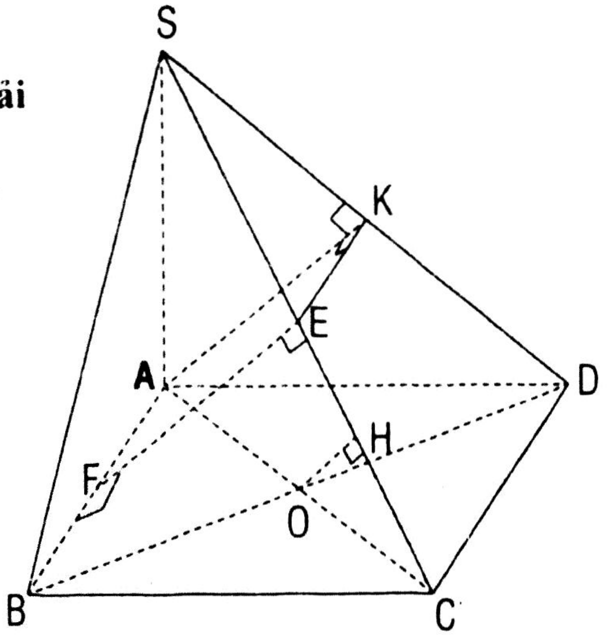
$\Rightarrow KS = \dfrac{a.\sqrt{6}}{2}$

$$\Rightarrow \tan\varphi = \dfrac{\dfrac{a.\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{a.\sqrt{6}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = 30^0$$

Bài 2: Cho hình chóp S.ABCD có SA $\perp$ (ABCD); tứ giác ABCD là hình vuông cạnh a; SA = h. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng:

1. SB và CD
2. CS và BD
3. CS và AB

Giải



1. Ta có $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow BC \perp SB$.

Mặt khác ta có: $BC \perp CD$.

Vậy BC là đoạn vuông góc chung của SB và CD và độ dài đoạn vuông góc chung của SB và CD là BC = a.

2. Ta có $\begin{cases} SA \perp BD \\ AC \perp BD \end{cases}$

$\Rightarrow BD \perp (SAC)$

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Gọi H là hình chiếu vuông góc cua O trên CS.

$\Rightarrow OH \perp CS$

Mặt khác ta có: $BD \perp (SAC)$; $OH \subset (SAC)$

$\Rightarrow OH \perp BD$

$\Rightarrow$ Đoạn thẳng OH là đoạn vuông góc chung của CS và BD

. + Độ dài đoạn OH là độ dài đoạn vuông góc chung của CS và BD

Ta có tam giác OHC đồng dạng với tam giác SAC.

$\Rightarrow \dfrac{OH}{OC} = \dfrac{SA}{SC} \Rightarrow OH = OC.\dfrac{SA}{SC}$

Mặt khác ta có:

$$CS^2 = SA^2 + AC^2 = h^2 + (a\sqrt{2})^2 = h^2 + 2a^2 ; OC = \frac{a.\sqrt{2}}{2})$$

$$\Rightarrow OH = OC.\frac{SA}{SC} = \frac{a.\sqrt{2}}{2}.\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}$$

3. Ta có $\begin{cases} SA \perp BA \\ AD \perp BA \end{cases} \Rightarrow BA \perp (SAD)$

Ta có SD là hình chiếu vuông góc của CS trên mặt phẳng (SAD). Gọi K là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng SD; trong mặt phẳng (SCD) kẻ KE // CD (E thuộc CS); trong mặt phẳng (BAKE) kẻ EF // KA (F thuộc AB).

Ta có $BA \perp (SAD)$; $KA \subset (SAD)$

$\Rightarrow BA \perp KA$

Mà KA // FE

$\Rightarrow BA \perp FE$.

Ta có $CD \perp (SAD)$; $KA \subset (SAD)$

$\Rightarrow CD \perp KA$

Mà KA // FE $\Rightarrow CD \perp FE$.

Vậy đoạn thẳng FE là đoạn vuông góc chung của BA và CS

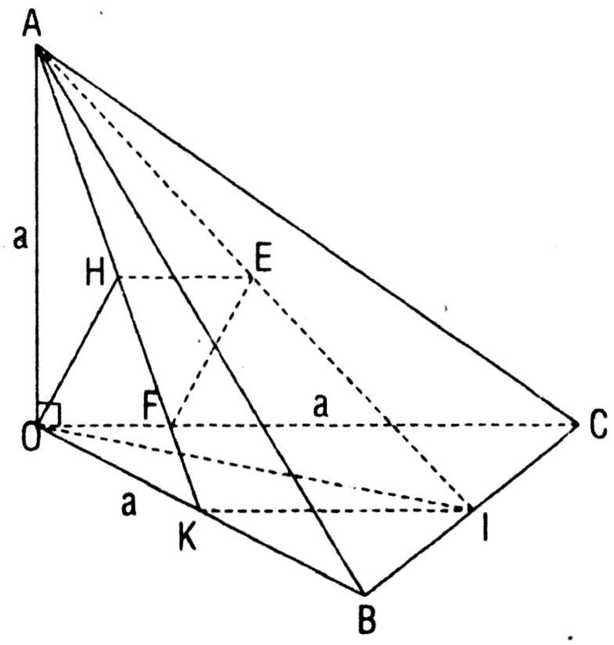
+ Ta có $FE = KA = \dfrac{SA.AD}{SD} = \dfrac{SA.AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \dfrac{ha}{\sqrt{h^2 + a^2}}$

+ **Chú ý:** có thể tính KA từ đẳng thức: $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AD^2}$

Bài 3: Cho tứ diện OABC có OA; OB; OC đôi một vuông góc với nhau và OA = a ; OA = OB = OC. Gọi I là trung điểm của cạnh BC. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của:

1. OA và BC
2. AI và OC

Giải



1. Ta có $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases}$

$\Rightarrow OA \perp (OBC)$

Mặt khác ta có: $OI \subset (OBC)$

$\Rightarrow OA \perp OI$

Ta có tam giác OBC vuông cân tại O; I là trung điểm của cạnh BC.

$\Rightarrow OI \perp BC$

Vậy ta có $\begin{cases} OI \perp OA \\ OI \perp BC \end{cases}$

$\Rightarrow$ Đoạn thẳng OI là đoạn vuông góc chung của OA và BC.

Độ dài đoạn OI là độ dài đoạn vuông góc chung của OA và BC.

Ta có $OI = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

2. Ta có $\begin{cases} OB \perp OC \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OC \perp (OBA)$

Gọi K là trung điểm của cạnh OB $\Rightarrow IK // OC \Rightarrow IK \perp (OBA)$

$\Rightarrow$ KA là hình chiếu vuông góc của AI trên mặt phẳng (OBA). Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên KA. Trong mặt phẳng (AIK) dựng đường thẳng HE // KI (E thuộc AI). Trong mặt phẳng (OCH) dựng đường thẳng FE // OH (F thuộc OC).

Ta có OH $\perp$ KA $\Rightarrow$ OH $\perp$ AI (định lí ba đường vuông góc)

Mà OH // FE $\Rightarrow$ FE $\perp$ AI(1)

Ta có OC $\perp$ (OBA); OH $\subset$ (OBA)

$\Rightarrow$ OC $\perp$ KA $\Rightarrow$ OC $\perp$ OH

Mà OH // FE $\Rightarrow$ OC $\perp$ FE(2)

Từ (1) và (2) ta có đoạn thẳng FE là đoạn vuông góc chung của OC và AI

Độ dài đoạn FE là độ dài đoạn vuông góc chung của OC và AI

$$\text{Ta có FE} = \text{OH} = \frac{OA.OK}{AK} = \frac{OA.OK}{\sqrt{OA^2 + OK^2}} = \frac{a.\frac{a}{2}}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

Bài 4: Cho hình chóp S.ABC. Biết tam giác ABC vuông ở A; AB = a; BC = 2a; điểm H thuộc cạnh AC; HC = $\frac{1}{3}$.CA; SH $\perp$ (ABC); SH = $\frac{a.\sqrt{6}}{3}$; hai điểm I, J lần lượt là trung điểm của cạnh BC, SA.

1. Chứng minh rằng: đoạn thẳng JI là đoạn vuông góc chung của BC; SA
2. Tính độ dài đoạn thẳng JI.

Giải

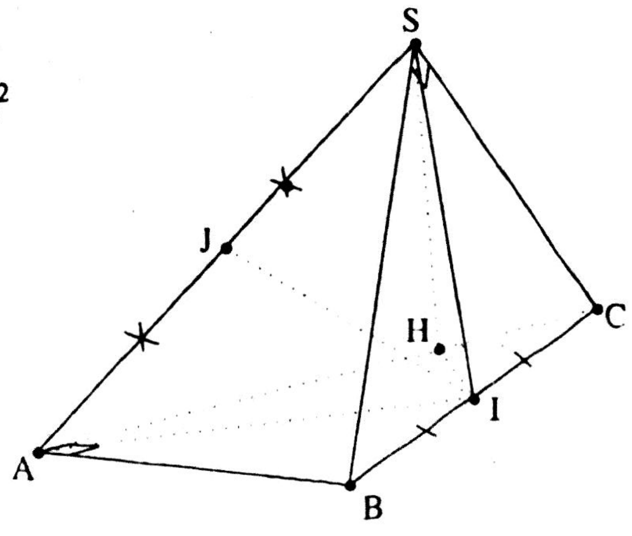
1. Ta có tam giác ABC vuông ở A và I là trung điểm cạnh BC

$\Rightarrow AI = \frac{BC}{2} = a$ và:

$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$

$\Rightarrow AC = a\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \begin{cases} CH = \frac{a\sqrt{3}}{3} \\ AH = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$



Ta có tam giác CHS vuông ở H

$\Rightarrow SC^2 = SH^2 + HC^2$

$$= \left(\frac{a.\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = a^2 \Rightarrow CS = a$$

Ta có tam giác BHS vuông ở H

$\Rightarrow SB^2 = SH^2 + HB^2 = SH^2 + (AB^2 + AH^2)$

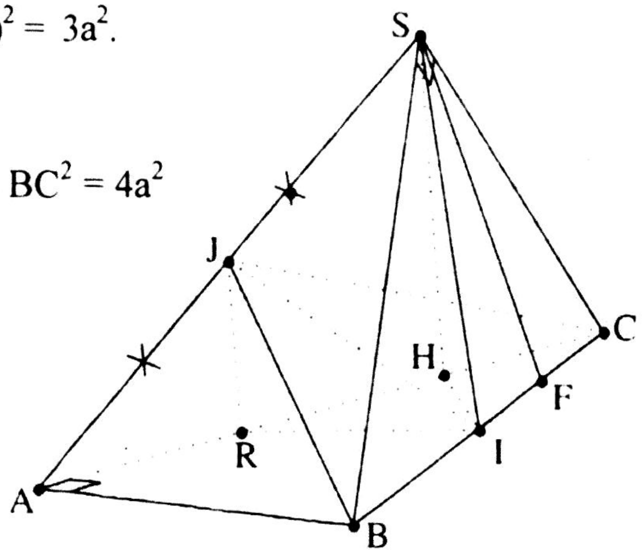
$$= (\frac{a.\sqrt{6}}{3})^2 + a^2 + (\frac{2a\sqrt{3}}{3})^2 = 3a^2.$$

$\Rightarrow SB = a\sqrt{3}$.

Vậy: $SB^2 + SC^2 = 3a^2 + a^2 = 4a^2$; $BC^2 = 4a^2$

$\Rightarrow SB^2 + SC^2 = BC^2$

$\Rightarrow \Delta SBC$ vuông ở S



Mặt khác ta có: I là trung điểm cạnh BC

$\Rightarrow SI = \frac{BC}{2} = a$

$\Rightarrow SI = AI = a$

$\Rightarrow$ tam giác AIJ cân tại I

Ta có J là trung điểm cạnh SA

Do đó $IJ \perp SA$ (1)

Ta có $\Delta ABJ = \Delta SCJ$ (vì $\begin{cases} AB = SC \\ AJ = SJ \\ \widehat{ABJ} = 90^0 = \widehat{CSJ} \end{cases}$) $\Rightarrow BJ = CJ$

Mặt khác ta có: I là trung điểm cạnh BC. Do đó $JI \perp BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : đoạn thẳng JI là đoạn vuông góc chung của SA và BC.

2. Tính độ dài đoạn thẳng JI

Gọi R lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AH

$\Rightarrow JR = \frac{1}{2}.SH = \frac{a.\sqrt{6}}{6}$ (vì J là trung điểm của đoạn thẳng SA)

và H là trung điểm của đoạn thẳng RC (vì $HC = \frac{1}{3}.CA$)

Gọi F là trung điểm của đoạn thẳng IC

$\Rightarrow RI = 2HF = 2\sqrt{SF^2 - SH^2} = 2\sqrt{\frac{3a^2}{4} - (\frac{a.\sqrt{6}}{3})^2} = \frac{a.\sqrt{3}}{3}$

(vì tam giác SIC đều nên $SF = IC.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = a.\frac{\sqrt{3}}{2}$)

Ta có SH $\perp$ (ABC); HF $\subset$ (ABC) $\Rightarrow$ SH $\perp$ HF

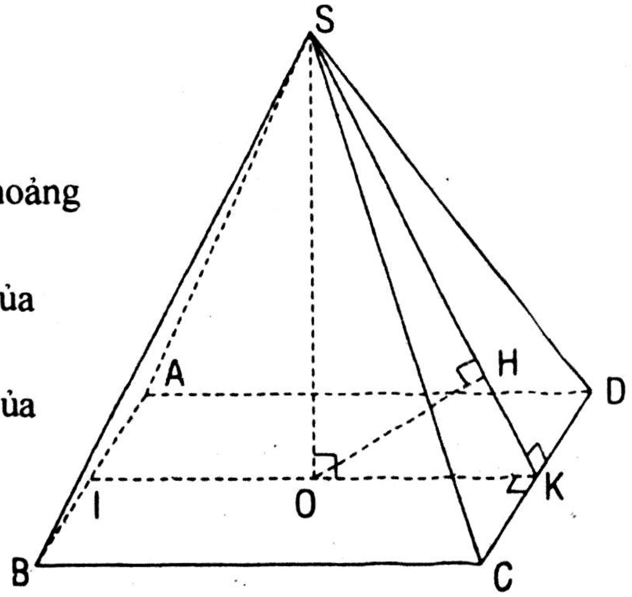
Mặt khác ta có: RJ // SH $\Rightarrow$ RJ $\perp$ HF

$\Rightarrow$ Tam giác RIJ vuông tại R

$$\Rightarrow JI^2 = JR^2 + RI^2 = \left(\frac{a.\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a.\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow JI = \frac{a.\sqrt{2}}{2}$$

Bài 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông có cạnh a. Gọi O là giao điểm của AC và BD; SO $\perp$ (ABCD); SO = a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau CS và AB.

Giải



Ta có AB // CD; CD $\subset$ (SCD)

$\Rightarrow$ AB // (SCD).

Mặt khác ta có CS $\subset$ (SCD).

Do đó khoảng cách cần tìm là khoảng cách giữa AB và mặt phẳng (SCD)

Gọi I; K lần lượt là trung điểm của cạnh AB; CD.

$\Rightarrow$ IK $\perp$ CD; O là trung điểm của đoạn thẳng IK.

$\Rightarrow$ d(CS; AB) = d(AB; (SCD))

= d(I; (SCD))

= 2.d(O; (SCD)) (*)

Mặt khác ta có: CD $\perp$ (SOK)

$\Rightarrow$ (SCD) $\perp$ (SOK)

Ta có SK = (SCD) $\cap$ (SOK)

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên SK

$\Rightarrow$ OH $\perp$ SK $\Rightarrow$ OH $\perp$ (SCD) $\Rightarrow$ d(O; (SCD)) = OH

Vậy từ (*) ta có khoảng cách cần tính là:

$$d(CS; AB) = 2.OH = 2.\frac{OS.OK}{SK} = \frac{OS.OK}{\sqrt{OS^2 + OK^2}}.2$$

$$= 2.\frac{a.\frac{a}{2}}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}} = 2.\frac{a\sqrt{5}}{5}$$

Bài 6: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'

1. Chứng minh rằng: BC' vuông góc với mặt phẳng (A'B'C'D')
2. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB' và BC'.

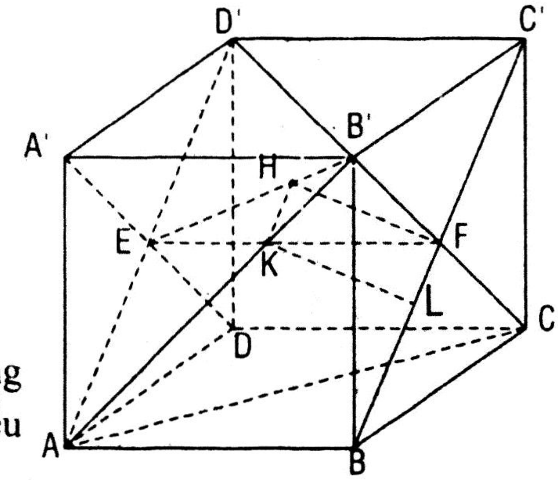
Giải

1. Ta có tứ giác BB'C'C là hình vuông nên ta có B'C $\perp$ BC'

Mặt khác ta có: A'B' $\perp$ (BB'C'C)

$\Rightarrow$ A'B' $\perp$ BC'

$\Rightarrow$ BC' $\perp$ (A'B'CD) (đpcm)



2. Ta có AD' // BC'

$\Rightarrow$ BC' // (AB'D')

Mặt khác ta có AB' $\subset$ (AB'D')

Gọi E; F lần lượt là tâm của hình vuông ADD'A'; BCC'B'. Gọi H là hình chiếu vuông góc của F trên EB'.

Ta có FH $\subset$ (A'B'CD)

Mà BC' $\perp$ (A'B'CD)

$\Rightarrow$ BC' $\perp$ FH.

$\Rightarrow$ AD' $\perp$ FH.

Mà EB' $\perp$ FH

$\Rightarrow$ FH $\perp$ (AB'D')

Gọi K là giao điểm của đường thẳng d (d đi qua H và d // BC') và AB'

Từ K dựng KL // HF (L thuộc BC')

Vậy đoạn thẳng KL là đoạn vuông góc chung của AB' và BC'.

Ta có $LK = FH = \dfrac{FE.B'F}{\sqrt{FE^2 + B'F^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Bạn đọc có thể giải thêm các bài sau:

Bài 7: Cho hình chóp S.ABCD; O là giao điểm của AC và BD; SO $\perp$ (ABCD). Mặt phẳng (P) qua đường thẳng AB và (P) $\perp$ (SCD); góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABCD) bằng 30^0.

1. Biết ABCD là hình vuông cạnh a.

   a. Tính độ dài đoạn thẳng SO; SA.

   b. Tính $\tan\varphi$, với φ là góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABCD).

2. Xác định và tính thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mặt phẳng (P). Biết ABCD là hình thoi cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^0$.

Bài 8: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a; A'A $\perp$ (ABC). Góc giữa BC' và (ABB'A') bằng 30^0. Gọi M; N lần lượt là trung điểm của cạnh AC và BB'.

1. Tính độ dài cạnh A'A.
2. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (BA'C')
3. Tính góc giữa đường thẳng NM và mặt phẳng (BA'C').

MỤC LỤC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 9724852; (04) 9724770. Fax: (04) 9714899

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: NGUYỄN BÁ THÀNH

Biên tập: HOÀNG TIẾN – TRẦN HƯNG

Chế bản: Nhà sách HỒNG ÂN

Trình bày bìa: NGỌC ANH

CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH HÌNH HỌC 11

Mã số: 1L - 222ĐH2007

In 2.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ti TNHH In Bao Bì Phong Tân - TP. Hồ Chí Minh.

Số xuất bản: 681 - 2007/CXB/18 – 104/ĐHQGHN, ngày 24/8/2007.

Quyết định xuất bản số: 507 LK/XB.

In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2007.